Семинар 8.

Задача 1. Пусть C - невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$ и $f : \mathbb{P}^1 \to C,\ t \mapsto x(t)$ - ее рациональная параметризация. Докажите, что для любых 4 различных точек $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4 \in \mathbb{P}^1$ двойные отношения $(t_1t_2t_3t_4)$ и $(x(t_1), x(t_2), x(t_3), x(t_4))$ совпадают.

Задача 2. На проективной плоскости над полем $\mathbb{K}$ характеристики $\neq 2$ даны невырожденная коника C и кривая Y с уравнением $\Phi(x_0, x_1, x_2) = 0$ степени d, т. е. $\Phi(x_0, x_1, x_2)$ - однородный многочлен степени $d \geqslant 1$. Пусть Y не содержит C, т. е. найдется хотя бы одна точка $(y_0 : y_1 : y_2) \in C$ такая, что $\Phi(y_0, y_1, y_2) \neq 0$. Докажите, что кривые C и Y имеют не более, чем конечное число точек пересечения, и это число не превосходит $2d$.
Указание: воспользуйтесь существованием рациональной параметризации коники C_1.

Задача 3. Пусть однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ в проективной плоскости являются однородными многочленами второй степени от однородных параметров $(\lambda : \mu)$:
$x_i(\lambda, \mu) = a_i\lambda^2 + b_i\lambda\mu + c_i\mu^2, \quad i = 0, 1, 2.$
Существует ли коника с уравнением $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ такая, что $F(x_0(\lambda, \mu), x_1(\lambda, \mu), x_2(\lambda, \mu)) \equiv 0$?

Задача 4. Пусть C - невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$ и $O \notin C$ - некоторая точка. Проведем через O три прямые $a,\ b,\ c$, пересекающие C в точках $A, A_1,\ B, B_1$ и C, C_1 соответственно, и построим прямую $p = MN$, где $M = AB_1 \cap BA_1,\ N = BC_1 \cap CB_1$. Покажите, что прямая p не зависит от выбора прямых $a,\ b,\ c$. Она называется полярой точки O относительно коники C и обозначается p_O.

Задача 5. В условиях предыдущей задачи пусть дана прямая через точку O, пересекающая конику C в точках A и B. Для произвольной точки $X \in p_O$ построим точки A_1 и B_1 на C такие, что $X \in A_1B$ и $X \in B_1A$. Убедитесь, что $O \in A_1B_1$.

Задача 6. Проективное преобразование $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ называется инволюцией, если f не является тождественным преобразованием и $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$. На прямой $\mathbb{P}^1$ возьмем две различные точки A и B и рассмотрим отображение $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1,\ X \mapsto Y$, где пара точек X, Y гармонически делит пару точек A, B. Докажите, что f - инволюция. Докажите, что если основное поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то всякая инволюция на $\mathbb{P}^1$ получается вышеуказанным образом.