Игры с неполной информацией

Рябов П.П.

ВШЭ, Москва
2020

Байесовы игры

- Игроки имеют типы T_i (тип игрока включает информированность, полезности и представления об остальных)
- (Ф-ция полезности) $u_i : A_N \times T_N \to \mathbb{R}$, где A_N – множество действий игроков
- (Представления игрока о других) $p_i : T_i \to \triangle(T_{-i}),\ \ p_i(t_i) := p(t_{-i}|t_i)$
- Данные (T_i, u_i, p_i) известны всем.
- Стратегия игрока $s_i : T_i \to A_i$

Пример

$$
(p = \tfrac{1}{12}) \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
(p = \tfrac{1}{4}) \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) \\ (0,1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
(p = \tfrac{1}{6}) \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) \\ (2,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
(p = \tfrac{1}{2}) \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) \\ (2,1) & (1,0) \end{pmatrix} \end{array}
$$

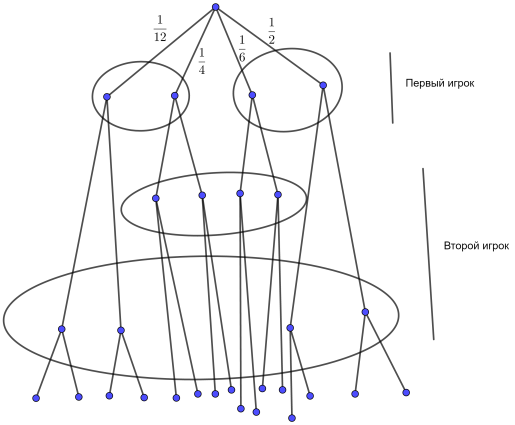
Пример

$$\left(p = \tfrac{1}{12}\right) \quad \begin{array}{c|cc} & A_2 & B_2 \\ \hline A_1 & (1,1) & (1,0) \\ B_1 & (0,0) & (0,1) \end{array} \qquad \left(p = \tfrac{1}{4}\right) \quad \begin{array}{c|cc} & A_2 & B_2 \\ \hline A_1 & (1,0) & (1,1) \\ B_1 & (0,1) & (0,0) \end{array}$$

$$\left(p = \tfrac{1}{6}\right) \quad \begin{array}{c|cc} & A_2 & B_2 \\ \hline A_1 & (0,1) & (0,0) \\ B_1 & (2,0) & (1,1) \end{array} \qquad \left(p = \tfrac{1}{2}\right) \quad \begin{array}{c|cc} & A_2 & B_2 \\ \hline A_1 & (0,0) & (0,1) \\ B_1 & (2,1) & (1,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} (\tfrac{1}{12})\{I, I\} & (\tfrac{1}{4})\{I, II\} \\ (\tfrac{1}{6})\{II, I\} & (\tfrac{1}{2})\{II, II\} \end{array}$$

Пример: Дерево игры



Пример: Смешанные стратегии

- У первого игрока есть строго доминирующая стратегия: играть A_1, если I; играть B_1, если II.

- Если второй игрок оказался в ситуации I, то вероятность $\{I, I\}$ равна $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$, а вероятность $\{II, I\}$ – $\frac{2}{3}$.
Пусть второй игрок играет A_2 с вероятностью p, а B_2 с вероятностью $1-p$.
Тогда его выигрыш расчитывается по формуле
$\frac{1}{3}p \times 1 + \frac{1}{3}(1-p) \times 0 + \frac{2}{3}p \times 0 + \frac{2}{3}(1-p) \times 1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}p$. Следовательно, второму выгоднее играть B_2.

- Если второй оказался в ситуации II, то ему выгоднее играть A_2.

Ожидаемый выигрыш

Ожидаемый выигрыш игрока i в чистых стратегиях:

$$\sum_{t_i} \sum_{t_{-i}} p(t_i, t_{-i}) U_i(s_i, s_{-i}; (t_i, t_{-i}))$$

Theorem

В играх с неполной информацией с конечным множеством типов T_i Баесово равновесие существует в смешанных стратегиях.

Аукцион первой цены

Два игрока участвуют в аукционе первой цены. Хотим найти по оценке предмета v, равномерно распределённой для каждого игрока на отрезке $[0, 1]$, симметричное равновесие $b(v)$. То есть, стратегию $b(v)$, являющуюся оптимальным ответом на саму себя.

Будем искать $b(v)$ среди дифференцируемых монотонно возрастающих фукнций $b : [0, 1] \to [0, 1]$

Аукцион первой цены

Обозначим ответ на оценку v одного из игроков $b(v)$ за $\tilde{b}$

Тогда выигрыш игрока
$(v - \tilde{b})P(b(v_2) < \tilde{b}) = (v - \tilde{b})P(v_2 < b^{-1}(\tilde{b})) = (v - \tilde{b})b^{-1}(\tilde{b})$

Аукцион первой цены

Обозначим ответ на оценку v одного из игроков $b(v)$ за $\tilde{b}$

Тогда выигрыш игрока
$(v - \tilde{b})P(b(v_2) < \tilde{b}) = (v - \tilde{b})P(v_2 < b^{-1}(\tilde{b})) = (v - \tilde{b})b^{-1}(\tilde{b})$

$\frac{d()}{d\tilde{b}} = -b^{-1}(\tilde{b}) + (v - \tilde{b})\frac{1}{b'(b^{-1}(\tilde{b}))} = 0$

Аукцион первой цены

Обозначим ответ на оценку v одного из игроков $b(v)$ за $\tilde{b}$

Тогда выигрыш игрока

$(v - \tilde{b})P(b(v_2) < \tilde{b}) = (v - \tilde{b})P(v_2 < b^{-1}(\tilde{b})) = (v - \tilde{b})b^{-1}(\tilde{b})$

$\frac{d()}{d\tilde{b}} = -b^{-1}(\tilde{b}) + (v - \tilde{b})\frac{1}{b'(b^{-1}(\tilde{b}))} = 0$

$v - \tilde{b} = b^{-1}(\tilde{b})b'(b^{-1}(\tilde{b}))$

Аукцион первой цены

$$v - \tilde{b} = b^{-1}(\tilde{b})b'(b^{-1}(\tilde{b}))$$

$$\tilde{b} = b(v)$$

$$v - b(v) = b^{-1}(b(v))b'(b^{-1}(b(v))$$

$$v - b(v) = vb'(v)$$

Аукцион первой цены

$$v - b(v) = vb'(v)$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{d}{dv}(vb(v))$$

Аукцион первой цены

$$v - b(v) = vb'(v)$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{d}{dv}(vb(v))$$

$$\frac{v^2}{2} = const + vb(v)$$

Пусть $b(0) = 0$

$$b(v) = \frac{v}{2}$$

Аукцион

Theorem (Роджер Майерсон)

- *Найдено симметричное равновесие в игре*
- *Игрок, оценивший предмет в 0, ничего не платит*
- *Предмет выигрывает человек с максимальной оценкой*

$\Longrightarrow$ *Средний выигрыш продавца в аукционе первой цены равен среднему выигрышу продавца в аукционе второй цены.*

Перечень использованных источников

В. И. Данилов “Лекции по теории игр”

Н. Калинин Лекция 11(фрагмент)

А. В. Саватеев Аукцион первой цены

А. В. Саватеев Аукцион первой цены-2