

# Повторяющиеся игры

## Лекция 16

Белецкий Антон

НИУ ВШЭ

2020

# Отличия от однократных игр

Часто возникают игры, многократно повторяющиеся между одними и теми же партнерами. Интуиция подсказывает, что люди иначе ведут себя с теми, с кем ожидают поддерживать долговременные отношения. Повторяющиеся игры являются способом формализовать подобные ситуации.

Часто возникают игры, многократно повторяющиеся между одними и теми же партнерами. Интуиция подсказывает, что люди иначе ведут себя с теми, с кем ожидают поддерживать долговременные отношения. Повторяющиеся игры являются способом формализовать подобные ситуации.

- *Предательства и наказания.* В однократных играх отсутствует возможность наказать игрока за предательство.

Часто возникают игры, многократно повторяющиеся между одними и теми же партнерами. Интуиция подсказывает, что люди иначе ведут себя с теми, с кем ожидают поддерживать долговременные отношения. Повторяющиеся игры являются способом формализовать подобные ситуации.

- *Предательства и наказания.* В однократных играх отсутствует возможность наказать игрока за предательство.
- *Репутация,* заработанная в прошлых раундах, может изменить результат будущих игр в сторону, выгодную игроку.

- Игры с заранее определенным числом раундов
- Бесконечно повторяющиеся игры (в этом случае игру называют еще *суперигрой*)
- Игры с рандомизированным числом раундов (более сложный вариант)

- Для возможности наказания противника необходима информация о его действиях в прошлом
- Для простоты будем считать, что вся информация о стратегиях и выигрышах во всех предыдущих раундах доступна

У игроков появляется возможность реагировать на то, как действуют остальные, то есть стратегии в каждом раунде зависят от траектории игры в предыдущих раундах.

У игроков появляется возможность реагировать на то, как действуют остальные, то есть стратегии в каждом раунде зависят от траектории игры в предыдущих раундах.

Если исходная (однократная) игра имела вид  $(N, (S_i), (u_i))$ , то в повторяющейся игре стратегия игрока для  $(t + 1)$ -ого раунда — это функция

$$f_i^{t+1} : S_N^t \rightarrow S_i$$

( $S_N^t$  — это множество всех возможных историй игры до раунда  $t$  включительно).



Полная стратегия игрока — это набор из стратегий для каждого раунда ( $f_i^t$ ).

Последовательность ходов определяется индуктивно по профилям стратегий для каждого игрока:

$$s_i^1 = f_i^1, s_i^2 = f_i^2(s_N^1), \dots s_i^k = f_i^k(s_N^1, \dots s_N^{k-1})$$

- Конечные игры — сумма выигрышей по раундам (или средний выигрыш)

- Конечные игры — сумма выигрышей по раундам (или средний выигрыш)
- Бесконечные игры
  - Средний выигрыш —  $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \frac{u_i(s_N^t)}{T}$ . Если не сходится, то обычно берут нижний предел
  - Дисконтированный выигрыш. Фиксируем дисконт  $\delta < 1$ , и будем считать выигрыш равным  $(1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(s_N^t)$

# Повторяющаяся дилемма заключенных

Таблица выигрышей имеет вид:

	$C$	$E$
$C$	2, 2	0, 3
$E$	3, 0	1, 1

- В однократной игре стратегия  $E$  доминирующая, поэтому каждому игроку будет выгодно переключиться на нее.

# Повторяющаяся дилемма заключенных

Таблица выигрышей имеет вид:

	$C$	$E$
$C$	2, 2	0, 3
$E$	3, 0	1, 1

- В однократной игре стратегия  $E$  доминирующая, поэтому каждому игроку будет выгодно переключиться на нее.
- Двукратная игра: во втором раунде каждому выгодно использовать  $E$ . Но тогда и в первом раунде стратегии  $E$  выгоднее (нет влияния на будущее).

# Повторяющаяся дилемма заключенных

Таблица выигрышей имеет вид:

	$C$	$E$
$C$	2, 2	0, 3
$E$	3, 0	1, 1

- В однократной игре стратегия  $E$  доминирующая, поэтому каждому игроку будет выгодно переключиться на нее.
- Двукратная игра: во втором раунде каждому выгодно использовать  $E$ . Но тогда и в первом раунде стратегии  $E$  выгоднее (нет влияния на будущее).
- По индукции — конечное количество раундов.

# Повторяющаяся дилемма заключенных

Таблица выигрышей имеет вид:

	$C$	$E$
$C$	2, 2	0, 3
$E$	3, 0	1, 1

- В однократной игре стратегия  $E$  доминирующая, поэтому каждому игроку будет выгодно переключиться на нее.
- Двукратная игра: во втором раунде каждому выгодно использовать  $E$ . Но тогда и в первом раунде стратегии  $E$  выгоднее (нет влияния на будущее).
- По индукции — конечное количество раундов.
- *Однако в случае суперигры ситуация коренным образом изменяется.*

# Дилемма заключенных — суперигра

Таблица выигрышей имеет вид:

	$C$	$E$
$C$	2, 2	0, 3
$E$	3, 0	1, 1

Рассмотрим такую стратегию: играть  $C$ , пока соперник играет ее же, а иначе навсегда переключиться на  $E$ . Если оба игрока применяют ее, то средние выигрыши равны 2 для обоих.



# Дилемма заключенных — суперигра

Таблица выигрышей имеет вид:

	$C$	$E$
$C$	2, 2	0, 3
$E$	3, 0	1, 1

Рассмотрим такую стратегию: играть  $C$ , пока соперник играет ее же, а иначе навсегда переключиться на  $E$ . Если оба игрока применяют ее, то средние выигрыши равны 2 для обоих.

Это равновесие: если игрок на  $t$ -том раунде сыграет  $E$ , то его последовательность выигрышей:

$$2, 2, 2, \dots 3, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots \quad \forall s \in \mathbb{N} : x_{t+s} \leq 1$$

В итоге, средний выигрыш не превосходит 1.

Если игрок отклоняется в  $t$ -ом раунде, то его выигрыш:

$$\begin{aligned}(1 - \delta)(2 + \delta + \delta^2 + \dots + 2\delta^{t-1} + 3\delta^t + x_{t+1}\delta^{t+1} + \dots) &\leq \\ &\leq (1 - \delta)(2 + \delta + \delta^2 + \dots + 2\delta^{t-1} + 3\delta^t + \frac{\delta^{t+1}}{1 - \delta}) = \\ &= (1 - \delta)(2\frac{1 - \delta^t}{1 - \delta} + 3\delta^t + \frac{\delta^{t+1}}{1 - \delta}) = \\ &= 2 + \delta^t - 2\delta^{t+1} = 2 + \delta^t(1 - 2\delta)\end{aligned}$$

Видим, что при  $\delta > \frac{1}{2}$  (достаточно дальновидный игрок) смена стратегии невыгодна.

Резкая разница между конечной и бесконечной ситуацией основывается на предположении об очень высокой рациональностью игроков.

Если один игрок считает, что второй будет действовать, как в бесконечном случае, то второму выгодно не разубеждать его почти до самого конца, то есть конечный случай приближается к бесконечному.

# Свойства средних выигрышей

- Средний выигрыш не может быть меньше гарантированного уровня (так как можно постоянно применять осторожную стратегию).

# Свойства средних выигрышей

- Средний выигрыш не может быть меньше гарантированного уровня (так как можно постоянно применять осторожную стратегию).
- На самом деле, для любого набора стратегий  $(f_{-i})$  существует стратегия  $f_i$ , достигающая выигрыша хотя бы  $\beta_i = \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$  (если игрок знает, как остальные игроки походят в раунде  $t$ , то он может выбрать стратегию, являющуюся наилучшим ответом на ходы остальных, и получить выигрыш не меньше  $\beta_i$ )
- Это означает, что выигрыши, достигаемые в равновесии,  $x_i \geq \beta_i$

# Свойства средних выигрышей

- Средний выигрыш не может быть меньше гарантированного уровня (так как можно постоянно применять осторожную стратегию).
- На самом деле, для любого набора стратегий  $(f_{-i})$  существует стратегия  $f_i$ , достигающая выигрыша хотя бы  $\beta_i = \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$  (если игрок знает, как остальные игроки походят в раунде  $t$ , то он может выбрать стратегию, являющуюся наилучшим ответом на ходы остальных, и получить выигрыш не меньше  $\beta_i$ )
- Это означает, что выигрыши, достигаемые в равновесии,  $x_i \geq \beta_i$
- С другой стороны, средние выигрыши лежат в выпуклой оболочке возможных выигрышей в исходной игре (так как являются их комбинациями)

## Народная теорема

Любой набор выигрышей, лежащий в выпуклой оболочке выигрышей исходной игры и индивидуально рациональный (то есть  $x_i \geq \beta_i$ ), достигается в некотором равновесии.

Сначала научимся реализовывать выигрыши вида  $u_N(s_N) > \beta_N$ .

- Стратегии наказания. Обозначим за  $s_{-i}^*$  набор стратегий игроков, который является худшим исходом для игрока  $i$ , то есть  $s_{-i}^* = \arg \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$ . Тогда  $\forall s'_i : u_i(s'_i, s_i) \leq \beta_i$ .



Сначала научимся реализовывать выигрыши вида  $u_N(s_N) > \beta_N$ .

- Стратегии наказания. Обозначим за  $s_{-i}^*$  набор стратегий игроков, который является худшим исходом для игрока  $i$ , то есть  $s_{-i}^* = \arg \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$ . Тогда  $\forall s'_i : u_i(s'_i, s_i) \leq \beta_i$ .
- Равновесные стратегии:
  - Использовать  $s_i$  (из которых состоит  $s_N$ ) до тех пор, пока все остальные используют их же.
  - Если какой-то игрок использует другую стратегию, то начиная со следующего раунда все остальные переключаются на  $s_{-i}^*$ .

Сначала научимся реализовывать выигрыши вида  $u_N(s_N) > \beta_N$ .

- Стратегии наказания. Обозначим за  $s_{-i}^*$  набор стратегий игроков, который является худшим исходом для игрока  $i$ , то есть  $s_{-i}^* = \arg \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$ . Тогда  $\forall s'_i : u_i(s'_i, s_i) \leq \beta_i$ .
- Равновесные стратегии:
  - Использовать  $s_i$  (из которых состоит  $s_N$ ) до тех пор, пока все остальные используют их же.
  - Если какой-то игрок использует другую стратегию, то начиная со следующего раунда все остальные переключаются на  $s_{-i}^*$ .
- Это равновесие: отклоняться невыгодно, так как в равновесном состоянии все получают больше, чем  $\beta_N$ , а отклонившийся игрок начиная со следующего получает не больше, чем  $\beta_i$ , то есть его средний выигрыш уменьшается.

Остальные выигрыши — это выпуклые комбинации чистых выигрышей, рассмотренных только что.

- Если коэффициенты комбинации — рациональные числа: поочередно играем чистые компоненты в количествах, пропорциональных коэффициентам их вхождения в комбинацию, если кто-то отклоняется — бесконечно наказываем его.

Остальные выигрыши — это выпуклые комбинации чистых выигрышей, рассмотренных только что.

- Если коэффициенты комбинации — рациональные числа: поочередно играем чистые компоненты в количествах, пропорциональных коэффициентам их вхождения в комбинацию, если кто-то отклоняется — бесконечно наказываем его.
- Если коэффициенты вещественные — приближаем их рациональными со все большей точностью.

- В суперигре очень много равновесий, поэтому не очень понятно, какое из них реализуется.

- В суперигре очень много равновесий, поэтому не очень понятно, какое из них реализуется.
- Народная теорема верна также и для дисконтированного выигрыша, если дисконт близок к 1.

- В суперигре очень много равновесий, поэтому не очень понятно, какое из них реализуется.
- Народная теорема верна также и для дисконтированного выигрыша, если дисконт близок к 1.
- *Совершенная народная теорема.* Равновесия возникают за счет наказания игроков, нарушающих соглашения. Они неустойчивы, если стратегии наказания невыгодны остальным. Можно добиться совершенности равновесия, аккуратно добавив соглашения о наказании тех, кто уклоняется от стратегий наказания, и т. д.