24 ноября 2020г.

Семинар 1

(I) Разбор 5 минутки прошлого семинара.

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - tg2x \\ \dot{y} = \sqrt{1+x} + \sin\left(\frac{x-4y}{2}\right) - 1 \end{cases}$$

а) Линеаризация

б) Фаз. портрет.

Решение:

а) Разложение до первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha &= \alpha + \dots \\ \sqrt{1+\alpha} &= 1 + \frac{\alpha}{2} + \dots \\ \sin\alpha &= \alpha + \dots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

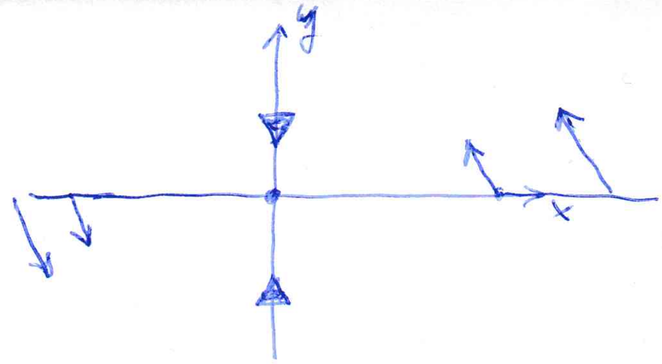
Зам: Собств. значения A уже видны — это диагональные элементы $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Не нужно составлять хар. полином.

б) Это вырожденный устойчивый узел.

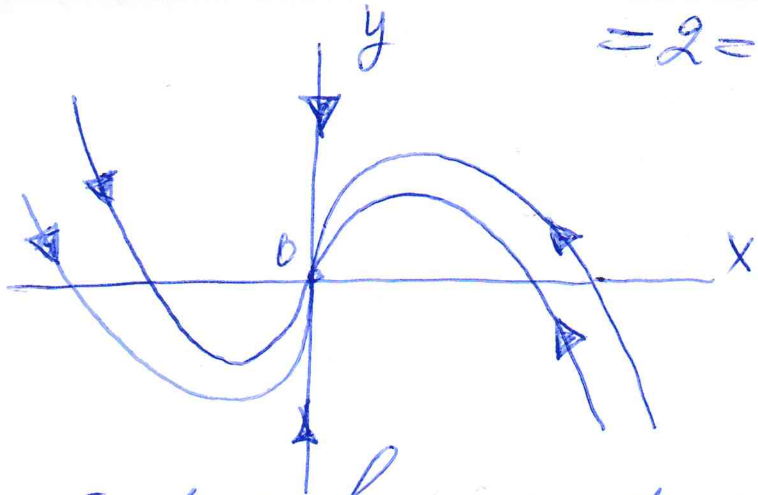
Собств. вектор $Au = -2u \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Сепаратриса — ось ординат.

Поле на оси Ox: $\vec{v}\Big|_{y=0} = \begin{pmatrix} -2x \\ x-2y \end{pmatrix}\Bigg|_{y=0} = \begin{pmatrix} -2x \\ x \end{pmatrix}$.



$\Rightarrow$



Устойчивый вырожд. узел.

Вещественная часть собств. значений не равна $0 \Rightarrow$ т. Гр.-Хартмана работает и портрет линеаризованной системы гомеоморфен Ф. П. исходной системы в некоторой окрестности особой точки $(0,0)$.

(II) Зависимость решений от параметра.

Рассмотрим систему диф. уравнений первого порядка:

$$(\bigstar)\quad \begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = f^i(t, x, \mu) & 1 \le i \le n \\ x^i(t_0) = a^i(\mu), \end{cases}$$

где f^i и a^i — заданные функции.

Решения такой системы $x^i(t,\mu)$ зависят от параметра μ (их может быть несколько))

и мы рассмотрим метод, — 3 —
позволяющий исследовать зависимость от μ в случае, когда точное решение системы неизвестно. Это типичная ситуация в приложениях. Например, в Квантовой механике наш метод лежит в основе теории возмущений при решении диф. уравнения Шредингера.
Итак, сформулируем теорему с ограничениями на f^i и a^i.

$\boxed{\text{Теорема}}$

Пусть $f^i(t, x^1, \ldots, x^n, \mu)$ и $a^i(\mu)$ удовлетворяют условиям:

(а) $f^i(t, \vec{x}, \mu)$ непрерывны по совокупности аргументов в некоторой области $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\mu \times \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$.

(б) Функции f^i имеют в $\tilde{\Gamma}$ <u>непрерывные частные производные</u> по $x^1, \ldots, x^n$ и μ до порядка $p \geq 1$ включительно;

$$\exists \ \frac{\partial^p f^i}{(\partial x^1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x^n)^{\alpha_n}\partial\mu^\beta}$$ — непрерывны в $\tilde{\Gamma}$ при всех $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\beta=p$.

(в) Функции $a^i(\mu)$, определяющие начальные данные, непрерывно дифф. до порядка p на некотором интервале $a<\mu<b$ (лежит в $\tilde{\Gamma}$).

Тогда решение задачи (A)

$$x^i = x^i(t,\mu) \quad 1\le i\le n$$

непрерывно дифференцируемо по μ до порядка p включительно.

Практическая польза от этой теоремы появляется в случае, если удаётся найти некоторое μ_0 из интервала (a,b), для которого задача (A) решается точно. (Например, при этом μ_0 пропадают какие-нибудь нелинейные слагаемые или что-то в этом роде).

Тогда решение для $\mu \neq \mu_0$ можно получить в виде ряда по $\Delta\mu = (\mu - \mu_0)$ с известными явно коэффициентами — некоторыми функциями t.

Обозначим точное решение при $\mu = \mu_0$ символом $x^i_{(0)}(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i_{(0)}}{dt} = f^i(t, \vec{x}_{(0)}, \mu_0) \\ x^i_{(0)}(t_0) = a^i(\mu_0) \end{cases}$$

Пользуясь теоремой мы можем разложить любое другое решение $x^i(t,\mu)$ системы (A) для некоторого μ вблизи μ_0 в ряд Тейлора по разности $\Delta\mu$ до порядка p:

$$x^i(t,\mu) = \underbrace{x^i(t,\mu_0)}_{=x^i_{(0)}(t)} + \Delta\mu\, x^i_{(1)}(t) + \ldots + \frac{(\Delta\mu)^p}{p!} x_{(p)}(t) + O(\Delta\mu^p)$$

Известно!

Наша задача — найти функции $x^i_{(1)}(t), \ldots, x^i_{(p)}(t)$.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Эти функции есть частные производные точного решения $x^i(t,\mu)$ по μ в точке μ_0:

$$x^i_{(k)}(t) = \left.\frac{\partial^k x^i(t,\mu)}{\partial \mu^k}\right|_{\mu=\mu_0}$$

Если первая функция $x^i_{(0)}(t) = x^i(t,\mu_0)$ известна явно (что мы будем предполагать), то все $x^i_{(k)}(t)$ удовлетворяют системам <u>линейных</u> уравнений с известными коэффициентами.

Чтобы найти эти линейные системы, нужно подставить разложение в ряд Тейлора функции $x^i(t,\mu)$ в систему ($\star$), разложить также правые части f^i и a^i в ряд по μ и приравнять друг другу отдельные слагаемые с одинаковой степенью $\Delta\mu$. Проиллюстрируем это разложением до <u>1го порядка</u>:

$$x^i(t,\mu) = x^i_{(0)}(t) + \Delta\mu\, x^i_{(1)}(t) + o(\Delta\mu)$$

$$a^i(\mu) = \underbrace{a^i(\mu_0)}_{= a^i_{(0)}} + \Delta\mu\, a^i_{(1)} + o(\Delta\mu)$$

$$f^i(t, \vec{x}(t,\mu), \mu) = f^i(t, \vec{x}_{(0)} + \Delta\mu\, \vec{x}_{(1)}, \mu_0 + \Delta\mu) =$$

$$= f^i(t, \vec{x}_{(0)}, \mu_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^k}\Bigg|_{\substack{\vec{x}=\vec{x}_{(0)} \\ \mu=\mu_0}} \Delta\mu\, x^k_{(1)} + \frac{\partial f^i}{\partial \mu}\Bigg|_{\substack{\vec{x}=\vec{x}_{(0)} \\ \mu=\mu_0}} \Delta\mu$$

$$\frac{d}{dt} x^i(t,\mu) = \frac{d}{dt} x^i_{(0)}(t,\mu_0) + \Delta\mu \frac{d x^i_{(1)}(t)}{dt} + o(\Delta\mu)$$

$$x^i(t_0,\mu) = a^i(\mu)$$

$$\| \qquad \Downarrow$$

$$x^i_{(0)}(t_0) + \Delta\mu\, x^i_{(1)}(t_0) = a^i_{(0)} + \Delta\mu\, a^i_{(1)}$$

— Это начальные данные для $x^i_{(k)}(t_0)$

Подставив эти разложения в (A), получим для $x^i_{(1)}(t)$ <u>линейную</u> систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d x^i_{(1)}(t)}{dt} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f^i}{\partial x^k}\Bigg|_{\substack{\mu=\mu_0 \\ \vec{x}=\vec{x}_{(0)}}}} \, x^k_{(1)}(t) + \underbrace{\dfrac{\partial f^i}{\partial \mu}\Bigg|_{\substack{\mu=\mu_0 \\ \vec{x}=\vec{x}_{(0)}}}} \\ \\ x^i_{(1)}(t_0) = a^i_{(1)} \end{cases}$$

Известные явно функции t

$\boxed{\text{Зам.}}$ Частный случай этой схемы: если f^i не зависит от μ $\Rightarrow \frac{\partial f^i}{\partial \mu} = 0$, а μ входит только в начальные данные.

В этом случае система на $x^i_{(1)}(t)$ – <u>однородная линейная</u> и называется системой уравнений в вариациях. ($x^i_{(1)}(t)$ – <u>вариация</u> x^i при изменении начальных данных).

<u>Пример 1</u>

$n = 1$, имеем всего одно уравнение.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + \dfrac{2\mu}{t} \\ x(1) = -1 + \mu \end{cases}$$

Решаем в области $t > 0$, например, так как $f(t, x, \mu) = x^2 + \frac{2\mu}{t}$ должна быть <u>непрерывна</u> по аргументам.

Зависимость от μ у f и $a(\mu) = -1 + \mu$ вообще аналитична, можно разлагать до любого порядка.

Выделенное значение μ_0 видно сразу: при $\mu = \mu_0 = \underline{0}$ всё решается точно:

$$\begin{cases} \dot{x}_{(0)}(t) = x_{(0)}^2 \\ x_{(0)}(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow x_{(0)}(t) = -\frac{1}{t} \quad (t>0).$$

В данном примере $\Delta\mu = \mu - \mu_0 = \mu$ и имеем разложение:

$$x^{\S}(t,\mu) = x_{(0)}(t) + \mu\, x_{(1)}(t) + \frac{\mu^2}{2!} x_{(2)}(t) + \ldots$$

Функция начальных данных $a(\mu) = -1 + \mu$ уже разложена по μ как нам нужно. Получим разложение правой части уравнения:

$$x^2 = \left(x_{(0)} + \mu\, x_{(1)} + \frac{\mu^2}{2!} x_{(2)} + \ldots \right)^2 =$$

$$= x_{(0)}^2 + 2\mu\, x_{(0)} x_{(1)} + \mu^2 \left(x_{(1)}^2 + x_{(0)} x_{(2)} \right) + \ldots$$

И ещё $\frac{2\mu}{t}$ даст 1 вклад в уравнение для $x_{(1)}$:

Итак получаем равенство рядов по μ:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(x_{(0)} + \mu x_{(1)} + \frac{\mu^2}{2} x_{(2)} + \ldots\right) = \\ \quad = x_{(0)}^2 + \mu\left(2x_{(0)}x_{(1)} + \frac{2}{t}\right) + \mu^2\left(x_{(1)}^2 + x_{(0)}x_{(2)}\right) + \ldots \\ x_{(0)}(1) + \mu x_{(1)}(1) + \frac{\mu^2}{2!} x_{(2)}(1) + \ldots = -1 + \mu \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x_{(k)}(1) = 0$ при $k \geq 2$, т.к. нет слагаемых с $\mu^2, \mu^3, \ldots$

На $x_{(0)}$ получится уже решенная задача, на $x_{(1)}$ получаем ~~задачу~~ задачу Коши, приравняв слагаемые с μ в первой степени:

$x_{(0)}$ подставили

$$\mu^1: \begin{cases} \frac{dx_{(1)}}{dt} = 2x_{(0)}x_{(1)} + \frac{2}{t} = -\frac{2}{t}x_{(1)} + \frac{2}{t} \\ x_{(1)}(1) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ На $x_{(1)}$ — линейное неоднородное уравнение, $x_{(1)}(t) = 1 + \frac{C}{t^2}$ — общее решение. $x_{(1)}(1) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x_{(1)}(t) = 1}$$

при μ^2: $x_{(1)} = 1$ $x_0 = -\frac{1}{t}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dx_{(2)}}{dt} = x_{(1)}^2 + x_{(0)} x_{(2)} = 1 - \frac{x_{(2)}}{t} \\ x_{(2)}(1) = 0 \end{cases}$$

Эта линейная задача тоже решается.

$$x_{(2)}(t) = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{t^2}\right)$$

$$t > 0$$

Таким образом, мы получаем решение исходного нелинейного уравнения в виде ряда по μ с известными коэффициентами:

$$x(t,\mu) = -\frac{1}{t} + \mu + \frac{\mu^2}{3}\left(t - \frac{1}{t^2}\right) + o(\mu^2)$$

Пример 2

$n = 2$ - система 2х уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4\cancel{t}y^2 & x(0) = 0 \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x & y(0) = 0 \end{cases}$$

Начальные данные не зависят от μ.

Требуется найти $\left.\frac{\partial X(t,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}$.

Замечаем, что $\mu=0=\mu_0$ — точка, где всё решается точно.

До первого порядка по μ:

$$X(t,\mu)=X_{(0)}(t)+\mu\underline{X_{(1)}(t)}+\ldots$$

↑ Это от нас требуют в условии

$$y(t,\mu)=y_{(0)}(t)+\mu y_{(1)}(t)+\ldots$$

$$y^2=y_{(0)}^2+2\mu y_{(0)}y_{(1)}+o(\mu)$$

Подставляем в систему и получаем:

μ^0 — главное приближение:

$$\begin{cases}\dot{X}_{(0)}=4t\,y_{(0)}^2 & X_{(0)}(0)=0\\ \underline{\dot{y}_{(0)}=1} & y_{(0)}(0)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{y_{(0)}=t} \Rightarrow \begin{cases}\dot{X}_{(0)}=4t^3\\ X_{(0)}(0)=0\end{cases} \Rightarrow \underline{X_{(0)}=t^4}$$

Первый порядок μ^1:

$$\begin{cases} \dot{x}_{(1)} = 8t\, y_{(0)} y_{(1)} = 8t^2 y_{(1)} \\ \dot{y}_{(1)} = 5x_{(0)}(t) = 5t^4 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_{(1)}(0) = 0 \\ x_{(1)}(0) = 0 \end{matrix}$$

$$\to y_{(1)} = t^5 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{(1)}(t) = 8t^7 \\ x_{(1)}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{(1)} = t^8$$

Получаем в итоге:

$$\begin{cases} x(t,\mu) = t^4 + \mu t^8 + o(\mu) \\ y(t,\mu) = t + \mu t^5 + o(\mu) \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = t^8$$

Ещё пример, если будет время.

Пример 3

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + t x^3 \\ x(2) = \mu \end{cases} \quad \text{Найти } \left.\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$$

При $\mu = 0$ угадывается решение

$$x_{(0)}(t) \equiv 0$$

$$x(t,\mu) = x_{(0)} + \mu x_{(1)} + o(\mu)$$

$$x^2(t,\mu) = x_{(0)}^2 + 2\mu x_{(0)} x_{(1)} + o(\mu)$$

$$x^3(t,\mu) = x_{(0)}^3 + 3\mu x_{(0)}^2 x_{(1)} + o(\mu)$$

Для вариации $x_{(1)}$ получаем уравнение:

$$\begin{cases} \dot{x}_{(1)} = x_{(1)} + 2x_{(0)}x_{(1)} + \\ \qquad + 3t\, x_{(0)}^2 x_{(1)} \\ x_{(1)}(2) = 1 \end{cases}$$

Поскольку $x_{(0)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{(1)} = x_{(1)} \\ x_{(1)}(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{(1)}(t) = e^{t-2}$$

$$x(t,\mu) = \mu e^{t-2} + o(\mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \underline{e^{t-2}}$$