Семинар 9 .

Всюду предполагается, что $\mathrm{char}\,\mathbf{k} \neq 2$.

Задача 1. Пусть $\mathcal{C}$ - невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$ и $S \in \mathbb{P}^2$ - точка, не лежащая на $\mathcal{C}$. Докажите, что через S проходят ровно две различные касательные прямые к конике $\mathcal{C}$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи пусть коника $\mathcal{C}$ задана уравнением $\{\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = x^TAx = 0\}$, где $x = (x_0, x_1, x_2)^T$ - столбец однородных координат в $\mathbb{P}^2$, $A = (a_{ij})$ - симметрическая (3×3)-матрица, а точка S имеет координаты $(y_0 : y_1 : y_2)$. Найдите уравнение поляры $p_S(\mathcal{C})$ точки S относительно коники $\mathcal{C}$.

Задача 3. В условиях задачи 1 пусть X - произвольная точка на конике $\mathcal{C}$. С помощью линейки постройте касательную прямую к $\mathcal{C}$ в точке X.

Задача 4. Проективное преобразование $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ называется инволюцией, если f не является тождественным преобразованием и $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$. На прямой $\mathbb{P}^1$ возьмем две различные точки A и B и рассмотрим отображение $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1,\ X \mapsto Y$, где пара точек X, Y гармонически делит пару точек A, B. Докажите, что f - инволюция. Докажите, что если основное поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то всякая инволюция на $\mathbb{P}^1$ получается вышеуказанным образом.