Теория функций комплексного переменного
4 декабря 2020

$\wp$-функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$ ($\operatorname{Im}\omega_2/\omega_1 > 0$):

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{s\neq 0}\Big(\frac{1}{(z-s)^2} - \frac{1}{s^2}\Big), \quad s = 2\omega_1 n_1 + 2\omega_2 n_2, \quad n_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

Разложение в окрестности $z = 0$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + O(z^6), \quad g_2 = 60\sum_{s\neq 0} s^{-4}, \quad g_3 = 140\sum_{s\neq 0} s^{-6}.$$

ζ- и σ-функции Вейерштрасса: $\zeta'(z) = -\wp(z)$, $\sigma'(z)/\sigma(z) = \zeta(z)$,

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \Big(\wp(x) - \frac{1}{x^2}\Big)dx, \quad \log(\sigma(z)/z) = \int_0^z \Big(\zeta(x) - \frac{1}{x}\Big)dx.$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{s\neq 0}\Big(\frac{1}{z-s} + \frac{1}{s} + \frac{z}{s^2}\Big), \quad \sigma(z) = z\prod_{s\neq 0}\Big(1 - \frac{z}{s}\Big)e^{\frac{z}{s} + \frac{z^2}{2s^2}}.$$

$\zeta(z + 2\omega_\alpha) = \zeta(z) + 2\eta_\alpha$, $\sigma(z + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(z+\omega_\alpha)}$, $\eta_\alpha = \zeta(\omega_\alpha)$.
Выражение σ-функции через тэта-функцию:

$$\sigma(z) = 2\omega_1 e^{\eta_1 z^2/(2\omega_1)}\frac{\theta_1(z/(2\omega_1))}{\theta_1'(0)}.$$

Функции sn, cn и dn:

$$\operatorname{sn} u = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1\Big(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\Big)}{\theta_4\Big(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\Big)}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_2\Big(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\Big)}{\theta_4\Big(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\Big)}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}\frac{\theta_3\Big(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\Big)}{\theta_4\Big(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\Big)}.$$

1. Докажите, что функция $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

2. Докажите тождество $\wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z)$.

3. Докажите соотношение $2\eta_1\omega_2 - 2\eta_2\omega_1 = \pi i$.

4. Докажите, что при $x + y + z = 0$ справедливо тождество

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(x) & \wp'(x) \\ 1 & \wp(y) & \wp'(y) \\ 1 & \wp(z) & \wp'(z) \end{vmatrix} = 0.$$

5. Выразите $\begin{vmatrix} 1 & \wp(x) & \wp'(x) \\ 1 & \wp(y) & \wp'(y) \\ 1 & \wp(z) & \wp'(z) \end{vmatrix}$ при произвольных $x, y, z \in \mathbb{C}$ через σ-функции.

6. Докажите, что при $x + y + z = 0$ справедливо тождество

$$\Big(\zeta(x) + \zeta(y) + \zeta(z)\Big)^2 = \wp(x) + \wp(y) + \wp(z).$$

7. Докажите тождество

$$\zeta(x - a_1) - \zeta(x - a_2) + \zeta(a_1 - a_2) = -\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(x - a_1) + \wp'(x - a_2)}{\wp(x - a_1) - \wp(x - a_2)}.$$

8. Докажите тождества

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

где $k^2 = \theta_2^4(0)/\theta_3^4(0)$.