

## Семинар 11

1. Найти степень расширения  $\mathbb{Q}(7^{1/3})$  (присоединяются все корни кубические из числа 7) поля рациональных чисел.
2. Найти степень расширения  $\mathbb{Q}(7^{1/2}, 5^{1/2}, 3^{1/2})$  поля рациональных чисел и указать какой-нибудь базис этого расширения над  $\mathbb{Q}$ .
3. Доказать, что  $\cos \pi/10$  алгебраическое число и найти его минимальный многочлен:
  - а) над полем рациональных чисел;
  - б) над полем  $\mathbb{Q}(5^{1/2})$ .
4. Пусть  $L \subset \mathbb{C}$  конечное расширение числового поля  $P$ . Тогда алгебраические замыкания полей  $L$  и  $P$  в  $\mathbb{C}$  совпадают. Доказать.
5. Пусть многочлен  $f(x)$  степени  $n$  неприводим над полем  $P$ , а  $L|P$  – расширение степени  $m$ , причем  $\text{НОД}(n, m) = 1$ . Доказать, что  $f(x)$  неприводим и над полем  $L$ .
6. Доказать, что у поля вещественных чисел нет автоморфизмов, отличных от тождественного ( $\mathbb{C}$ : доказать, что любой автоморфизм этого поля является непрерывной функцией).
- 7\*. Существует ли многочлен степени больше единицы с целыми коэффициентами, который лонеприводим по любому простому модулю?