

Листок 3.

1. Найти интеграл от $|x|^p$ по половине единичного шара в \mathbb{R}^3 при тех p , для которых он конечен.
2. Найти интеграл функции $|\sin(x - y)|$ по квадрату $[0, \pi]^2$.
3. Выяснить, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $(\sin |x|)^\alpha$ на \mathbb{R}^n интегрируема по множеству $\{x: |x| \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$.
4. (a) Вычислить интеграл функции $x^2 y^2$ по кругу радиуса π с центром в нуле. (b) Вычислить интеграл функции $x^2 + y^2$ по множеству $|x| + |y| \leq 1$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$, $x^2 = 2ry$, $x^2 = 2sy$, где $0 < p < q$, $0 < r < s$.
6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.
7. Найти интеграл от функции $\sqrt{x^2 + y^2}$ по области в \mathbb{R}^3 , ограниченной поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
9. Выяснить, интегрируемо ли преобразование Фурье индикатора квадрата $[0, 1]^2$ в \mathbb{R}^2 .
10. Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, e_1, \dots, e_n — стандартный базис в \mathbb{R}^n . Доказать, что мера параллелепипеда, порожденного векторами Ae_1, \dots, Ae_n , равна $|\det(A^*A)|^{1/2}$, а также $|\det G|^{1/2}$, где G — матрица Грама с элементами $\langle Ae_i, Ae_j \rangle$.