Классическая теория поля 2020.

Листок 4. Электромагнитное поле и излучение.

Срок сдачи: до конца суток 18 декабря

---

1. Лоренцевы инварианты электромагнитного поля. Рассмотрим тензор напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ и дуальный тензор

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}.$$

Здесь $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ — полностью антисимметрический тензор четвертого ранга, $\varepsilon^{0123} = 1$.

а) Выразите в терминах компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ лоренцевы инварианты $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

б) Выразите пфаффиан кососимметрической 4×4 матрицы $F^{\mu\nu}$:

$$\mathrm{Pf}F = \frac{1}{8}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\mu\nu}F^{\rho\lambda} = \frac{1}{4}\,F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (\det F = (\mathrm{Pf}F)^2)$$

в терминах компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

2. В некоторой системе отсчета существуют однородные и постоянные электрическое и магнитное поля, вектора которых $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не параллельны друг другу. Докажите, что *почти всегда* существует инерциальная система отсчета, в которой эти поля будут параллельны и найдите скорость этой системы отсчета относительно исходной системы. Единственно ли решение задачи? В каком случае задача не имеет решения?

Указание. Рассмотрите лоренцевский буст вдоль прямой перпендикулярной к плоскости, натянутой на вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Для поиска исключительного случая полезно воспользоваться лоренцевскими инвариантами, найденными в задаче 1.

3. Найдите пространственную плотность заряда, отвечающую сферически симметричному потенциалу следующего вида (потенциал Юкавы):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{-r/a}}{r}, \quad r = |\vec{r}|,$$

где a — постоянный положительный параметр. Потенциал ϕ – нулевая компонента 4-вектора $A^\mu = (\phi, 0, 0, 0)$.

4. В пространстве Минковского M_3 найдите запаздывающую функцию Грина для уравнения движения свободного безмассового скалярного поля:

$$\Box\, G(x) = \delta^{(3)}(x), \qquad G(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0.$$

Здесь $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, а $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$ — метрический тензор в пространстве M_3.

5. Точечный заряд $q > 0$ движется с постоянной угловой скоростью по окружности радиуса R вокруг закрепленного точечного заряда $-q$. Период обращения равен T. Определите среднюю за период обращения инегральную мощность дипольного излучения этой системы (то есть, суммарную мощность дипольного излучения по всем направлениям).