Семинар № 15

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Подробно разберем метод решения дифференциальных уравнений вида:

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n y(x) = F(x),$$

где p_k $1 \le k \le n$ — заданные вещественные числа. Такое ДУ называется линейным ДУ с постоянными коэффициентами. Отличительной чертой этого класса ДУ является тот факт, что ФСР однородного уравнения всегда можно найти.

Однородное линейное уравнение и ФСР

Однородное: $F(x) \equiv 0$.

Для поиска ФСР делаем в однородном уравнении

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$$

подстановку $y(x) = e^{\lambda x}$, где λ — числовой параметр, который нужно найти. Поскольку $\frac{d^k}{dx^k}e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}$, $\geq 2 =$ то $y = e^{\lambda x}$ будет решением однородного уравнения, если λ – корень характеристического полинома:

$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \underbrace{(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n)}_{\text{характеристический полином}}\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0\ \forall x} = 0$$

① **Хар. полином** $L_n(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n$ имеет n различных корней (вещественных)

$L_n = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$ – простые веществ. корни.

Тогда функции $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$ $1 \leq k \leq n$ – представляют собой набор n линейно независимых решений $\Rightarrow$ это ФСР.

Действительно, $\forall y_k$ – решение, т.к. λ_k – корень, а вронскиан этой системы:

$$W_n[e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}] = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{\text{Определитель Вандермонда}} =$$

$$= e^{x\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

т.к. $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

II Хар. полином $L_n(\lambda)$ имеет $k < n$ различных вещественных корней с кратностями $m_i \geq 1$:

$$L(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

$$k < n \quad \text{и} \quad m_1+m_2+\dots+m_k = n$$

$$m_i \geq 1.$$

Функции $e^{\lambda_i x}$ по-прежнему решения ДУ и по-прежнему линейно-независимы, но их недостаточно для ФСР: в ФСР должно быть n линейно-независ. решений. Недостающие решения даются следующим утверждением:

$\boxed{\text{V}}$ Если λ_i – корень кратности $m_i \geq 1$ хар. полинома $L_n(\lambda)$, то m_i функций

$$e^{\lambda_i x},\ x e^{\lambda_i x},\ x^2 e^{\lambda_i x},\ \dots,\ x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}$$

представляют собой линейно независимый набор решений исходного однородного ДУ.

Проиллюстрируем на примере первой функции $xe^{\lambda_i x}$ (считаем, что $m_i \geq 2$):

Представим однородное ДУ в виде:

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\ldots+p_n y = \left(\frac{d^n}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n\right)y =$$

$$= L_n\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = 0$$

Применим формулу Лейбница для дифференцирования произведения ф-ций:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{s=0}^{k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{биномиальный} \\ \text{коэффициент}}}{C_k^s} \frac{d^s f}{dx^s}\cdot\frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}}g$$

У нас $f\cdot g = x\cdot e^{\lambda_i x}$ => сумма по s будет иметь только 2 ненулевых слагаемых: при $s=0$ и $s=1$:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(xe^{\lambda_i x}\right) = \left(xe^{\lambda_i x}\right)\lambda_i^k + \underset{\substack{\uparrow \\ C_k^1}}{k}\lambda_i^{k-1}e^{\lambda_i x}$$

$$\Rightarrow L_n\left(\frac{d}{dx}\right)\left(e^{\lambda_i x}\cdot x\right) = \left(xe^{\lambda_i x}\right)L_n(\lambda_i) + e^{\lambda_i x}L_n'(\lambda_i)$$

Но т.к. λ_i корень порядка ≥ 2, то

$L_n(\lambda_i)=0$ и $L_n'(\lambda_i)=0$. =>

$\Rightarrow \; x e^{\lambda_i x}$ — решение ДУ.

Линейная независимость очевидна из линейной независимости мономов $1, x, x^2, \ldots, x^{m_i - 1}$ (экспоненциальный множитель $e^{\lambda_i x}$ у всех один и тот же).

Полезное упражнение: вычислить вронскиан этой системы:

$$W_m[e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1} e^{\lambda x}] =$$

$$= e^{m\lambda x} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda^{m-1} & (m-1)\lambda^{m-2} & (m-1)(m-2)\lambda^{m-3} & \cdots & (m-1)! \end{bmatrix} =$$

$$= e^{m\lambda x}\, 0!\, 1!\, 2! \ldots (m-1)!$$

каждый столбец — производная по $\underline{\underline{\lambda}}$ от предыдущего столбца.

Итак, с каждым кратным корнем λ_i связан набор m_i линейно независимых решений, а т.к. $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, то

Их объединение даёт ФСР.

(III) Характеристический полином имеет компл. сопряжённые корни:

$\lambda = q + i\omega$ и $\bar{\lambda} = q - i\omega$.

$$e^{\lambda x} = e^{qx}(\cos\omega x + i\sin\omega x)$$

$$e^{\bar{\lambda} x} = e^{qx}(\cos\omega x - i\sin\omega x)$$

Мы работаем в веществ. области => в ФСР войдут 2 вещественные линейные комбинации этих комплексных решений:

$$\frac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda} x}}{2} = e^{qx}\cos\omega x$$

$$\frac{e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda} x}}{2i} = e^{qx}\sin\omega x$$

Если корень $\lambda = q + i\omega$ имеет кратность $m > 1$ (а => и $\bar{\lambda} = q - i\omega$ имеет такую же кратность), то в ФСР войдут $2m$ веществ. функций:

$$e^{qx}\cos\omega x,\ xe^{qx}\cos\omega x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{qx}\cos\omega x;$$

$$e^{qx}\sin\omega x,\ xe^{qx}\sin\omega x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{qx}\sin\omega x.$$

Пример 1.

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Найти ФСР.

$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{y_1(x) = e^x}$, $\underline{y_2 = e^{-2x}}$ – ФСР данного уравнения.

Пример 2.

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \underline{\lambda^3} + \underline{\underline{\lambda^2}} - \underline{\lambda} - \underline{\underline{1}} = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda^2-1) = 0$$

$$(\lambda+1)^2(\lambda-1) = 0$$

$\left.\begin{matrix} \lambda = -1 \text{ – корень кратности } \underline{2}. \\ \lambda = 1 \text{ – корень кратности } \underline{1}. \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} \lambda = 1 \longrightarrow e^x \\ \lambda = -1 \longrightarrow e^{-x},\ xe^{-x} \end{matrix}\right\}$ 3 линейно независимых элемента ФСР.

Пример 3.

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

(Гармонический осциллятор).

$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = i\omega \quad \bar{\lambda} = -i\omega$$

$\Rightarrow$ $y_1 = \cos \omega x \quad y_2 = \sin \omega x$ – ФСР.

Теперь решаем неоднородные уравнения

Напоминаем материал прошлого занятия: Если известна ФСР однородного ур-я $y_1, \dots, y_n$, то общее решение неоднородного есть частное его решение + произвольная линейная комбинация ФСР с конст. коэффициентами (общее решение однородного).

Частное решение всегда можно найти в виде:

$$y_{частн}(x) = C_1(x)\,y_1(x) + \dots + C_n(x)\,y_n(x)$$

где функции $C_i(x)$ находятся из системы диф. уравнений:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \dots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ F(x) \end{pmatrix}$$

Пример 4

$y'' - 3y' + 2y = x$

а) ФСР б) частное решение и общее решение.

(а) $y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

$y_1 = e^x \quad y_2 = e^{2x}$ — ФСР

(б) $y_{част.} = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}$,

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' = -e^x C_2' \\ e^x C_1' + 2e^{2x} C_2' = x \end{cases} \Rightarrow C_2' = x e^{-2x}$$

$$\boxed{C_2 = -\frac{1}{4} e^{-2x} (2x+1)}$$

$$C_1' = -e^x C_2' = -x e^{-x} \qquad \boxed{C_1 = e^{-x}(x+1)}$$

$y_ч = e^x C_1 + e^{2x} C_2 = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$

Общее: $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$