2020

Листок 4

Многомерные квантовые системы. Тождественные частицы. Теория возмущений

1) 3-мерный изотропный гармонический осциллятор. (см. Лекция 8, стр. 6)

Рассмотрим модель с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\vec{q}}^2, \quad \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{R}^3$$

в координатном представлении и в сферических координатах. Используя базис собственных векторов полного набора наблюдаемых $\{E, \vec{S}^2, S_3\}$ в стационарном уравнении Шредингера можно отделить угловые переменные θ и φ и свести задачу к решению радиального уравнения (см. Лекцию 9, стр. 1-3, формулу $\binom{*}{*}$)

a) Определите асимптотики этого уравнения при $r \to 0$ и $r \to \infty$. Используя их, постройте анзац для поиска состояний дискретного спектра $\hat{H}$ – связанных состояний системы (по аналогии с тем, как это делалось для атома водорода в Лекции 9, стр. 10-12)

Вычислите значения энергии E для состояний дискретного спектра

б) Для каждого уровня энергии E определите степень его вырождения (кратность) и возможные значения углового момента системы $\vec{S}^2$ при данном значении E.

в) Найдите плотность пространственного распределения гармонического осциллятора в основном и первом возбужденном состояниях при условии, что $S_3 = 0$ (выражения для сферических гармоник Y_l^m можно взять в конце Лекции 8)

---

2 В потенциал 3-мерного изотропного гармонического осциллятора помещены 4 невзаимодействующих между собой тождественных частицы – электрона (т.е. пространство состояний системы – $\mathcal{H} = \left(L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2\right)^{\otimes 4}$).

а) Определите значения энергии основного и первого возбуждённого состояний системы, а также степени их вырождения (кратности б) Для основного состояния определите возможные значения

- полного спина системы электронов;
- полного углового момента системы
- полного момента импульса системы (сумма её спина и углового момента).

в) Запишите волновую функцию основного состояния системы с нулевыми значениями полного спина и полного углового момента.

(Координатные волновые функции 3-мерного гармонического осциллятора обозначьте $\psi_{n,\ell,m}(\vec{r})$, где n, ℓ, m нумеруют разные собственные значения операторов энергии, квадрата углового момента, и его проекции на ось Oz, соответственно. Явные выражения для $\psi_{n,\ell,m}(\vec{r})$ выписывать не нужно.)

---

3 Квантовомеханическая система состоит из двух частиц спина $s = 1/2$. Пространственные степени свободы частиц "заморожены" (скажем, частицы занимают соседние места в кристаллической решётке). Невозмущенный гамильтониан их взаимодействия имеет вид:

$$\boxed{\hat{H}_0 = \frac{\hat{\vec{S}}^2}{2I}.}$$

Здесь $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}^{(1)} + \hat{\vec{S}}^{(2)} = \hat{\vec{S}} \otimes Id + Id \otimes \hat{\vec{S}}$, $\hat{S}_i := \frac{1}{2}\sigma_i$ – матрицы Паули. I – параметр интенсивности взаимодействия спинов, аналогичный моменту инерции для классического волчка.

Систему помещают в постоянное, но неоднородное магнитное поле $\vec{H}$, дающее возмущающую поправку в гамильтониан

$$\boxed{\hat{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon \hat{V}, \quad \varepsilon = |\vec{H}| \text{ – малая константа}, \quad \hat{V} = \hat{S}_3 \otimes Id + Id \otimes \hat{S}_2,}$$

то есть магнитное поле имеет постоянную величину и направлено по оси $\vec{Oz}$ / $\vec{Oy}$ в месте нахождения первой / второй частицы.

Рассчитайте:

а) первую ненулевую поправку к значению основного уровня энергии системы;

б) первую поправку к значениям остальных уровней энергии.