

Семинар 10.

Всюду предполагается, что $\text{char} k \neq 2$.

Задача 1. Как мы знаем, всякое проективное преобразование $f : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ в аффинной координате x на \mathbb{P}^1 задается как дробно-линейное преобразование $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$, где матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ невырождена. Найдите условие на коэффициенты матрицы A , необходимое и достаточное для того, чтобы преобразование f было инволюцией.

Задача 2. Пусть A - вырожденная ненулевая (3×3) -матрица, т.е. имеет место один из двух случаев: (а) ранг матрицы A равен 2, либо (б) ранг матрицы A равен 1. Рассмотрим конику \mathcal{C} с уравнением $x^T A x = 0$. Что такое двойственная к \mathcal{C} коника $\check{\mathcal{C}}$ в каждом из случаев (а) и (б)?

Задача 3. Сформулируйте теорему, двойственную к теореме Паскаля.

Задача 4. Как нам известно, для построения невырожденной коники \mathcal{C} по Штейнеру используется проективное соответствие $f : \check{A} \xrightarrow{\sim} \check{B}$ между двумя пучками прямых \check{A} и \check{B} с центрами A и B , $A \neq B$, такое, что $f(l) \neq l$, где $l = AB$. Как расположена прямая $f(l)$ по отношению к конике \mathcal{C} ?

Задача 5. В теореме Паскаля для невырожденной коники \mathcal{C} и точек A, B, C, A_1, B_1, C_1 возможны ли совпадения каких-либо из этих точек? Рассмотрите конкретные случаи. Как в этих случаях формулируется теорема Паскаля?