

Листок 2. МНОГООБРАЗИЯ (ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ, КАСАТЕЛЬНОЕ
ПРОСТРАНСТВО)

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ
Крайний срок сдачи 20.10.2020

Задачи со звездочками можно сдавать и после дедлайна.

1. Можно ли на границе единичного квадрата ввести (а) структуру гладкого многообразия? (б) структуру подмногообразия \mathbb{R}^2 ?

2. Рассмотрим пространства $n \times n$ -матриц с нормой $|A|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}^j|^2$. Покажите, что следующие группы G являются гладкими многообразиями и опишите касательные пространства к группам G в их матричных единицах, если (а) $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$; (б) $G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$; (а) $G = \text{SO}(n, \mathbb{R})$; (б) $G = \text{SU}(n, \mathbb{C})$.

3. Покажите, что $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ как многообразие диффеоморфно полноторию.

4. (а) Постройте атлас $\mathbb{R}P^2$ и покажите, что оно неориентируемо.

(б) Постройте атласы $\mathbb{R}P^n$. При каких n эти многообразия являются ориентируемыми, а при каких нет?

5. Пусть отображение $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее каждой точке сферы S^n проходящую через неё и начало координат прямую в \mathbb{R}^{n+1} . Докажите, что отображение F — гладкое, dF — невырожден во всех точках.

6. (а) Докажите, что лист Мёбиуса и бутылка Клейна — неориентируемые многообразия. (б)* Докажите, что двумерное многообразие тогда и только тогда ориентируемо, когда не содержит в себе лист Мёбиуса.

7. Докажите, что гладкие структуры на множестве M совпадают тогда и только тогда, когда пространства гладких функций на этих многообразиях совпадают.

8. (а) Приведите пример погружения многообразия в \mathbb{R}^n , взаимно однозначного с образом, но не являющегося вложением. (б) Пусть $f : N \rightarrow M$ — гладкое отображение одного многообразия в другое. Если существует такое подмногообразие (L, g) многообразия M , что $f(N) \subset g(L)$, то существует единственное отображение $h : N \rightarrow L$ такое, что $g \circ h = f$. Всегда ли отображение h является гладким (непрерывным)? Приведите контрпример, если он существует. (В этом случае говорят, что отображение f пропускается через подмногообразие (L, g) .)

9. * Введите структуру гладкого многообразия на TM и T^*M . Являются ли они ориентируемыми?

10. * Докажите, что компактное n -мерное многообразие с краем M может быть вложено в евклидово полупространство $H^N = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{N-1}$ при достаточно большом N так, что образ ∂M лежит в пространстве $x^1 = 0$.