Листок 1. Многообразия и поверхности
Гладкие многообразия
Крайний срок сдачи 25.09.2020

Задачи со звездочками можно сдавать и после дедлайна.

1. Задайте гладкий атлас (карты, гладкость перехода между картами) на множестве невырожденных треугольников в плоскости с вершиной в $(0,0)$ и углом $\frac{\pi}{3}$ при этой вершине.

2. (а) Напишите формулы, задающие стереографические проекции двумерной сферы

$$x^2+y^2+z^2=1$$

на плоскость $z=0$ из полюсов и определите с помощью них атлас.

(б) Напишите аналогичные формулы для n-мерной сферы S^n:

$$(x^0)^2+(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2=1,$$

и определите с помощью них атлас S^n.

(в) Докажите, что атлас S^n состоит как минимум из двух карт.

3. Введите на множестве всех прямых на плоскости естественную топологию и структуру гладкого многообразия, так, чтобы оно было гомеоморфно листу Мёбиуса.

4. Нарисуйте на плоскости множество точек, которое (а)* может быть образом непрерывной кривой, но не может быть образом гладкой кривой (Ответ необходимо обосновать!); (б) может быть гладкой, но не может быть образом регулярной кривой.

5. Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — гладкая функция,

$$\Sigma_C=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)=C\}$$

её множество уровня и $\operatorname{grad} f(x)\neq 0$, $x\in\Sigma_C$. Докажите, что в этом случае на Σ_C можно ввести структуру гладкого $(n-1)$-мерного многообразия.

6. Докажите, что у регулярной поверхности существует гладкий атлас.

7. Пусть (M,A) и $(\tilde{M},\tilde{A})$ — многообразия с заданными на них гладкими $C^{(k)}$-структурами. Гладкие структуры (M,A) и $(\tilde{M},\tilde{A})$ считаются *изоморфными*, если существует такое $C^{(k)}$-отображение $f:M\to\tilde{M}$, которое имеет обратное $f^{-1}:M\to\tilde{M}$ также $C^{(k)}$-отображение в атласах A, $\tilde{A}$.

(а) Покажите, что гладкая структура на $\mathbb{R}$, заданная картой $\varphi(x)=x^{2k+1}$, изоморфна, но не равна, гладкой структуре на $\mathbb{R}$, заданной картой $\psi(x)=x^{2n+1}$, $k\neq n$.

(б) Покажите, что на $\mathbb{R}$ все структуры одинаковой гладкости изоморфны.

(в)* Покажите, что на окружности S^1 любые две $C^{(\infty)}$-структуры изоморфны.
(Отметим, что это свойство остается верным вплоть до сферы S^6, а на сфере S^7, напротив, существуют неэквивалентные $C^{(\infty)}$-структуры.)

8. * Докажите, что гладкая замкнутая кривая на плоскости, не имеющая самопересечений, имеет не менее четырёх экстремумов кривизны.