# Листок 4. Дифференциальные формы и формула Стокса
## Гладкие многообразия
*Крайний срок сдачи 19.12.2020*

**1.** Пусть $v_1, v_2, v_3, v_4$ — линейно независимые векторы пространства $V$. Существуют ли $\xi_1, \xi_2 \in V$ такие, что

(а) $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 = \xi_1 \wedge \xi_2$;

(б) $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 + v_4 \wedge v_1 = \xi_1 \wedge \xi_2$?

**2.** Пусть $X$, $Y$ — векторные поля, $\omega$ — 1-форма. Докажите соотношение:

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]).$$

**3.** (а) Найдите площадь области, ограниченной астроидой:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(б) Вычислите интеграл $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ для любого контура $L \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Как ответ соотносится с формулой Стокса?

**4.** Покажите, что гладкое $n$-мерное многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда на нём существует нигде не вырождающаяся $n$-форма.

**5.** (а) Докажите, что на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ существует и единственна с точностью до множителя 2-форма, инвариантная относительно группы $SO(3)$. (б) Выпишите эту форму явно в координатах $\varphi, \psi$ (широта и долгота). (в) Найдите все $SO(3)$-инвариантные 2-формы на $\mathbb{R}^3$. Проверьте, что при ограничении на $S^2$ получаются формы, описанные в пункте (б).

**6.** Пусть $A, B, C$ — гладкие функции переменных $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, такие, что

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Найдите решение системы в частных производных

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C \end{cases}$$

с неизвестными функциями $P, Q, R$. *(Указание: достаточно найти такую 1-форму $\eta$, что выполнено: $A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy = d\eta$.)*

**7.** * Запишем элементы $(p, \tau) \in T^*M$ кокасательного расслоения к многообразию $M$ в координатах как $(p, v) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, где $\tau = q_1 dp_1 + \ldots + q_n dp_n$.

(а) Докажите, что форма, заданная формулой $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$ в каждой карте является невырожденной формой на $M$.

(б) Чему равна $n$-я внешняя степень $\omega^{\wedge^n}$ формы $\omega$? Выведите отсюда ориентируемость кокасательного расслоения.