Листок 3. Векторные поля и потоки на многообразиях
Гладкие многообразия
Крайний срок сдачи 27.11.2020

1. Докажите, что инъективное погружение компактного многообразия M в многообразие N является вложением.

2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ векторное поле V_A, которое в точке $x \in \mathbb{R}^n$ принимает значение Ax, где A — квадратная матрица порядка n. Докажите, что

$$[V_A, V_B] = -V_{[A,B]},$$

где $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор матриц.

3. На многообразии M с локальными координатами $q^1, \dots, q^n$ для векторных полей $X = X^1(q)\frac{\partial}{\partial q^1} + \ldots + X^n(q)\frac{\partial}{\partial q^n}$ и $Y = Y^1(q)\frac{\partial}{\partial q^1} + \ldots + Y^n(q)\frac{\partial}{\partial q^n}$ и отображения потока X_t поля X за время t найдите первый порядок по t в разложении в ряд по t поля

$$Y^1(X_t(q))\frac{\partial}{\partial(X_t(q))^1} + \ldots + Y^n(X_t(q))\frac{\partial}{\partial(X_t(q))^n}.$$

4. Пусть X, Y — векторные C^∞-поля, определенные в окрестности $p \in M$. Пусть g_1 — интегральная кривая X, начинающаяся в p. Пусть для достаточно малого τ, g_2 — интегральная кривая поля Y, начинающаяся в $g_1(\tau)$; g_3 — интегральная кривая поля $-X$, начинающаяся в $g_2(\tau)$; g_4 — интегральная кривая поля $-Y$, начинающаяся в $g_3(\tau)$. Определим кривую γ для достаточно малых τ следующим образом $\gamma(\tau^2) = g_4(\tau)$. Докажите, что

$$[X, Y](p) = \lim_{t \to +0} \dot{\gamma}(t).$$

5. Пусть X и Y — векторные поля и $[X, Y] = 0$. Докажите, что потоки X_t и Y_s коммутируют.

6. Если M — компактное многообразие, а X — гладкое поле на нём, то действие X_t является полным, то есть для каждой точки $p \in M$ интегральная кривая, проходящая через эту точку, определена на всех $t \in \mathbb{R}$.

7. Пусть D — бесконечно малый параллелепипед, $V(D)$ — его объём, X — гладкое векторное поле с преобразованием потока φ_t, тогда

$$V\big(\varphi_t(D)\big) = V(D) + V(D)\,\mathrm{div}X(p)\cdot t + o(tV(D)), \quad t \to 0,$$

где p — одна из вершин параллелепипеда. В ортонормированной системе координат (x, y, z) дивергенция определяется как

$$\mathrm{div}X = \frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z}, \qquad X = (X^1, X^2, X^3).$$

8. Для всяких двух точек x, y связного гладкого многообразия M существует диффеоморфизм f такой, что $f(x) = y$.