Умножение

Теорема. Пространство когомологий является (градуированным) кольцом

$$H^k(X) \otimes H^l(X) \to H^{k+l}(X)$$

$$(a, b) \mapsto a \smile b$$

- Билинейно
- Ассоциативно
- (Супер)коммутативно $a \smile b = (-1)^{kl} b \smile a$
- $1 \in H^0(X)$ задается коциклом "вычисляющим количество точек"
- Функториально (гомоморфизм обратного образа сохраняет умножение)

Определение $\Delta : X \to X \times X$

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \xrightarrow{\times} H^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(X)$$

$$X = \bigcup \sigma_\alpha \Rightarrow X \times X = \bigcup \sigma_\alpha \times \sigma_\beta$$

$$f \in C^k(X) \qquad g \in C^l(X)$$

$$f \times g\,(\sigma_\alpha \times \sigma_\beta) = f(\sigma_\alpha) \cdot g(\sigma_\beta)$$

Замечание (1) гомоморфизмы
(формула Кюннета)

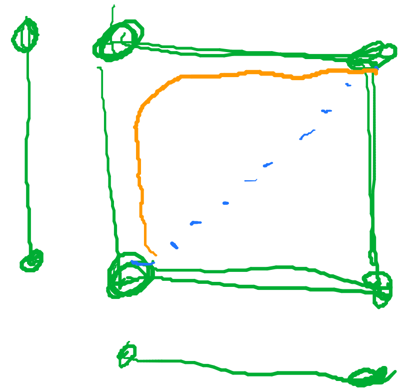
$$H_*(X) \otimes H_*(Y) \to H_*(X \times Y)$$

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \to H^*(X \times Y)$$

(направленные в одну сторону!)
являются изоморфизмами

- если группа коэффициентов поле
- если $H_*(X)$ или $H_*(Y)$ не имеет кручения
- в общем случае — по модулю кручения

② Вложение диагонали не является клеточным!



для вычисления Δ^* нужна клеточная аппроксимация

Поэтому нужно либо подразбить клеточное разбиение $X\times X$ так, чтобы диагональ стала клеточным подкомпл.-вом, либо использовать клеточную аппроксимацию.

Напомним, что $f: X \to Y$ является клеточным, если $f(X_k) \subset Y_k$. Тогда f_* вычисляется из индуцированного отображения букетов

$$\begin{array}{ccc} X_k/X_{k-1} & \longrightarrow & Y_k/Y_{k-1} \\ \wr & & \wr \\ \vee S^k & & \vee S^k \end{array}$$

Пусть X — компактное ориентированное многообразие. Тогда умножение в когомологиях двойственно пересечению (ко)циклов:

$A, B \subset X$ трансверсально пересекающиеся гладкие подмногообразия

$k = \operatorname{codim} A \quad l = \operatorname{codim} B$

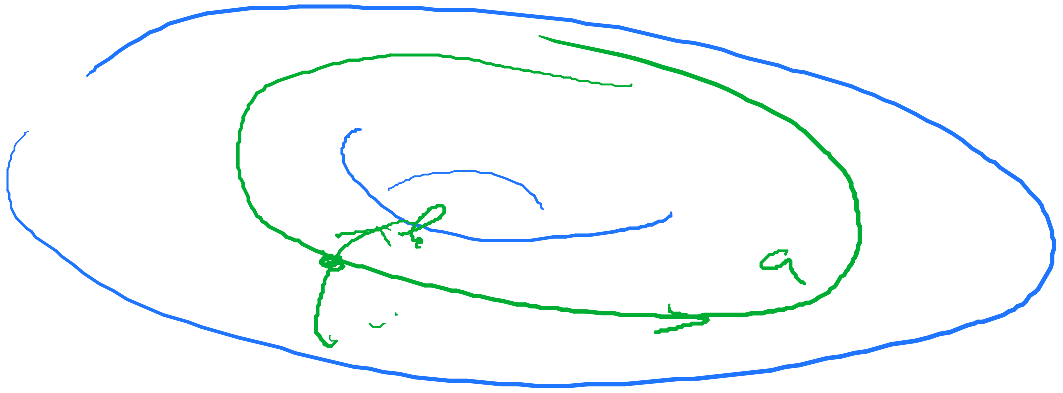
$$\boxed{[A] \cup [B] = [A \cap B] \in H^{k+l}(X)}$$

Д-во 1) $[A] \times [B]$ двойственно $\leftarrow A \times B \subset X \times X$

2) $\Delta : X \to X \times X$

$$\Delta^*([A \times B]) = [\Delta^{-1}(A \times B)] = A \cap B$$

Пример T^2



$[a]\cup[b] = [pt]$

n	0	1	2
$H^n(T^2)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
	$1=[T^2]$	$a \quad b$	

$ab=[pt]=-ba$

$a^2=b^2=0$

$a\cdot a=-a\cdot a$

$\Rightarrow 2a\cdot a=0$

$H^*(T^2)=\Lambda[a,b]$

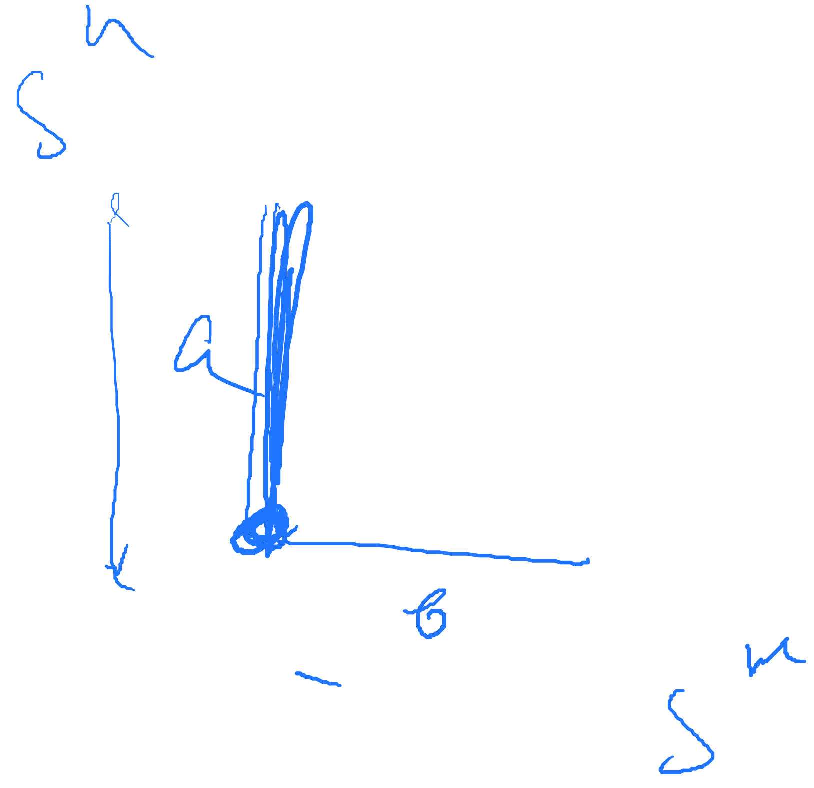
$H^*(T^n)=\Lambda[a_1,a_2,\dots,a_n]=\langle a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}\rangle \quad i_j\in\{0,1\}$

$\langle a_{k_1}\dots a_{k_l}\rangle$

$k_1<\dots<k_l$

Пример $H^*(S^m \times S^n)$

k	0	m	n	$m+n$
$H^k(S^m \times S^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
	1	a	b	$ab = c$



$a = [pt \times S^n]$ $\quad b = [S^m \times pt]$

$ab = [pt \times pt]$

$X = S^m \vee S^n \vee S^{m+n}$

k	0	m	n	$m+n$
$H_k(X)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
		a	b	c

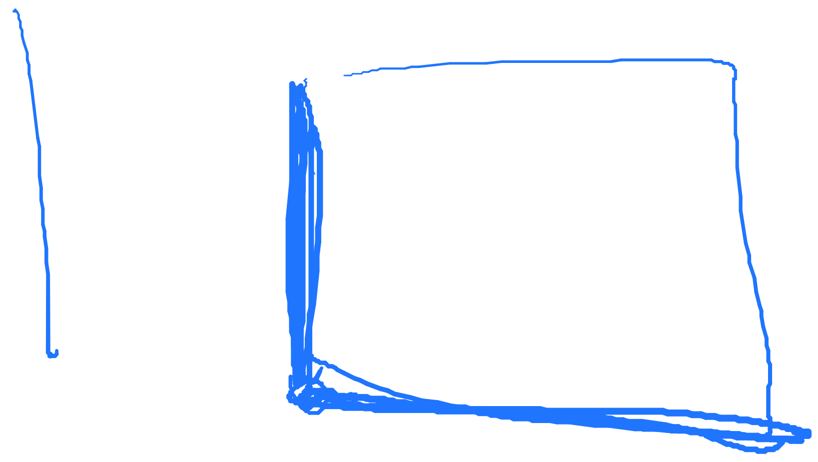
$ab = 0$

$\boxed{\text{Теорема } X = \Sigma Y \Rightarrow \text{умножение в } H^*(X) \text{ тривиально}}$

Д-во $\tilde{H}^*(X) = H^*(X)/\langle 1 \rangle$

$$\tilde{H}^*(X) \times \tilde{H}^*(X) \to \tilde{H}^*(X \wedge X) \xrightarrow{\Delta^*} \tilde{H}^*(X)$$

$$X \wedge X = X \times X \,/\, X \times pt \cup pt \times X$$



Упр. (Задача). Диагональное вложение $X \to X \wedge X$ стягиваемо, если $X = \Sigma Y$

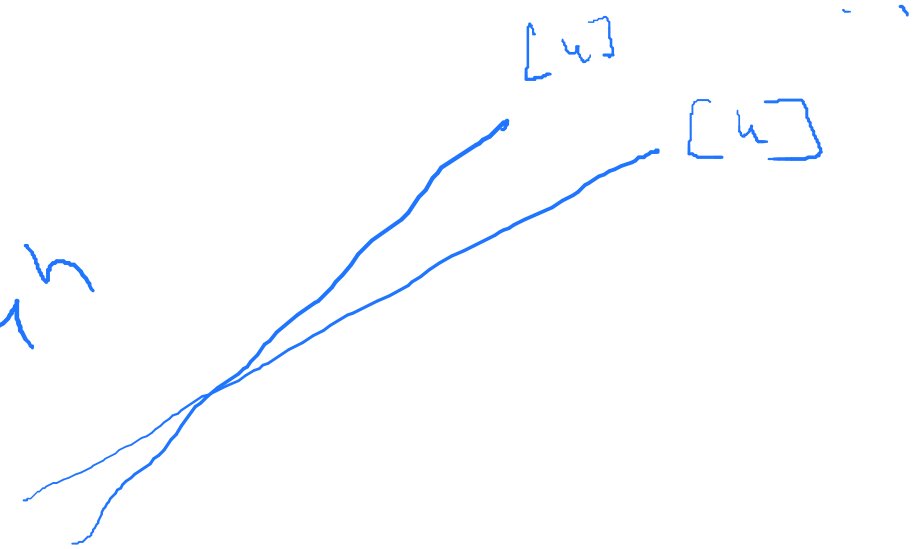
$$X = \mathbb{C}P^n = \sigma^0 \cup \sigma^2 \cup \sigma^4 \cup \dots \cup \sigma^{2n}$$

n	0	2	4	…	$2n$
$H_n(\mathbb{C}P^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$
	$[pt]$	$[\mathbb{C}P^1]$	$[\mathbb{C}P^2]$	…	$[\mathbb{C}P^n]$

$$\sigma^0 \cup \dots \cup \sigma^k = \overline{\sigma^k} = \mathbb{C}P^k$$

$$H^{2k}(\mathbb{C}P^n) \cong H_{2(n-k)}(\mathbb{C}P^n)$$

$H^n(\mathbb{C}P^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
	$1 = [\mathbb{C}P^n]$	$[\mathbb{C}P^{n-1}]$	$[\mathbb{C}P^{n-2}]$	
		$= u$	u^2	… u^n



$$u^2 = [\mathbb{C}P^{n-2}]$$

$$u^3 = [\mathbb{C}P^{n-k}]$$

$$\underset{= u^k}{[\mathbb{C}P^{n-k}]} \cap \underset{= u^l}{[\mathbb{C}P^{n-l}]} = \underset{= u^{k+l}}{[\mathbb{C}P^{n-k+l}]} \qquad k+l \le n$$

$$H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[u]/(u^{n+1})$$

$$H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[u]/(u^{n+1}) = \langle 1, u, u^2, \dots, u^n \rangle$$

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[u]$$

$$X \longrightarrow \mathbb{C}P^n$$

$$f^*([\mathbb{C}P^k]) = (\underline{f^*(u)})^{n-k}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}P^{n-1} & \hookrightarrow & \mathbb{C}P^n \\
u & \longleftarrow\!\shortmid & u \\
u^k & \longleftarrow\!\shortmid & u^k \qquad k = 1, 2, \dots, n-1 \\
0 & \longleftarrow\!\shortmid & u^n
\end{array}$$

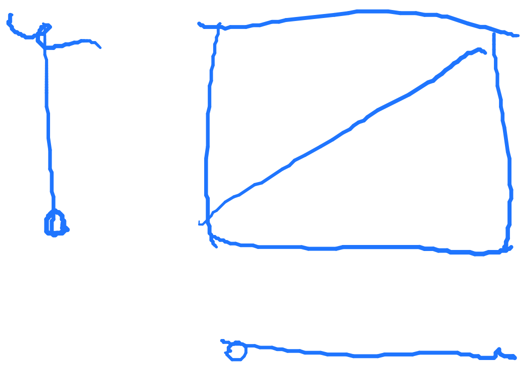
Комментарий к определению

Имеется умножение в комплексе сингулярных (симплициальных) коцепей

X — симплициальное

$\Delta^k \times \Delta^l$ не является симплексом

$\longrightarrow$ имеется каноническое симплициальное разбиение, включающее диагональ



Опр. $f \in C^k$ $g \in C^l$ симплициальные коцепи

$$(f \cup g)(\Delta_{a_0 \dots a_{k+l}}) := f(\Delta_{a_0 \dots a_k})\, g(\Delta_{a_k \dots a_{k+l}})$$