

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ
«ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ»
24 декабря 2020

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

1. Теоремы о неявном и обратном отображении (формулировки). Регулярные поверхности в \mathbb{R}^n , примеры и эквивалентность трёх определений. ([2], гл. XII, §1; [3], гл. 2 §1.4, §2.1)
2. Гладкие многообразия (топологическое многообразие, карта, атлас, эквивалентность атласов, гладкая структура, примеры гл. структур). ([2], гл. XV, §2.1, §2.2, [1])
3. Ориентация на многообразии. Ориентирующие атласы и их эквивалентность. Примеры ориентирующего и неориентирующего атласов одного многообразия. ([2], гл. XV, §2.3)
4. Существование на ориентируемом многообразии ровно двух различных ориентаций. ([2], гл. XV, §2.3)
5. Формулировка критерия ориентируемости многообразия с помощью цепочки карт. Пример неориентируемого многообразия. ([2], гл. XV, §2.3)
6. Многообразия с краем: определение. Край многообразия с краем является многообразием без края той же гладкости и на единицу меньшей размерности, чем само многообразие. ([2], гл. XII, §3.2)
7. Ориентация края, согласованная с ориентацией многообразия. Пример для поверхности в \mathbb{R}^n . ([2], гл. XII, §3.2)
8. Гладкие функции на многообразии и гладкие отображения многообразий. Индуцированные ими гомоморфизмы алгебр гладких функций на многообразиях.
9. Различные определения касательного вектора (класс эквивалентности кривых, дифференцирование) и их эквивалентность. ([4], гл. 1, [1])
10. Касательное пространство к многообразию в точке. Формула преобразования при переходе из одной карты в другую. Дифференциал и отображение f^* . ([4], гл. 1, [1])
11. Касательное расслоение к многообразию. Устройство атласа тотального пространства. ([4], гл. 1, §25, [1])

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

12. Кокасательное пространство в точке, кокасательное расслоение как многообразие. ([4], гл. 1, §25)

13. Определение векторного расслоения. Эквивалентные и тривиальные расслоения. Касательное расслоение. Векторное поле как сечение касательного расслоения. ([4], гл. 1, §25)

14. Гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию. ([2], гл. XV, §2.4, [5], §1.2)

15. Вложение, погружение и подмногообразие. Вложение произвольного компактного многообразия в \mathbb{R}^N при достаточно большом N . ([2], гл. XV, §2.4)

16. Векторные поля на многообразии. Скобка Ли (коммутатор). Основные свойства коммутатора.

17. Отображение потока векторного поля. Множество D_t , на котором определён поток векторного поля, свойства множества D_t . Поток векторного поля на компактном многообразии.

18. Производная Ли векторного поля и её основные свойства (Свойство $L_X Y = [X, Y]$ без доказательства.).

19. Тензоры и внешние формы: выражение через базис и их интерпретация как полилинейных функций.

20. Дифференциальные формы на многообразии. Определение через расслоения или в координатах. Отображения перехода в координатах. Структура алгебры $\Omega(M)$. Внешний дифференциал формы.

21. Отображение f^* : действие на дифференциальных формах. Коммутирование отображения f^* на формах и внешнего дифференциала. (см. [1])

22. Интегрирование дифференциальных форм в области \mathbb{R}^n и на многообразии. Формула Стокса. Формулировки формул Грина, Гаусса–Остроградского, трёхмерной формулы Стокса и их физический смысл.

23. Когомологии де Рама: определение, примеры.

24. Теорема Пуанкаре. Отображение f^* : действие на пространствах когомологий (f^* на когомологиях де Рама совпадают для гомотопных отображений, пространства когомологий де Рама гомотопически эквивалентных многообразий изоморфны).

Список литературы

- [1] С.М. НАТАНЗОН, *Введение в теорию гладких многообразий* // МЦНМО, 2020.
- [2] В.А. ЗОРИЧ, *Математический анализ II* // МЦНМО, 2012.
- [3] И.А. ТАЙМАНОВ, *Лекции по дифференциальной геометрии* // R&C Dynamics, 2006, Москва-Ижевск.
- [4] Ф. УОРНЕР, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли* // Бибфизмат, 1987.
- [5] Р. НАРАСИМХАН, *Анализ на вещественных и комплексных многообразиях* // МИР, 1971.