Еще раз про умножение

Умножение в $H^*(X)$

- определено для произвольного X
- градуировано, билинейно, ассоциативно, "супер"коммутативно
- функториально (f^* — гомоморфизм колец)
- если A — коммутативное кольцо, то $H^*(X;A)$ — A-алгебра
- если X — компактное многообразие, ориентированное (либо кольцо коэффициентов $\mathbb{Z}_2$), то умножение двойственно операции пересечения циклов

Примеры:

- $H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[u]/(u^{n+1})$, $u = [\mathbb{C}P^{n-1}] \in H^2(\mathbb{C}P^n)$
- $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w]/(w^{n+1})$, $w = [\mathbb{R}P^{n-1}] \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$
- "Почти изоморфизм" у ф-лы Кюннета

  $H^*(X) \otimes H^*(Y) \to H^*(X \times Y)$ — гомоморфизм колец

  $H^*(S^m \times S^n) = \langle 1, a, b, ab = (-1)^{mn} ba \rangle$, $a^2 = b^2 = 0$ $\quad a = p_1^*(\text{pt})$

  $p_i^*: H^m(S^m) \to H^m(S^m \times S^n)$
- Умножение в $H^*(\Sigma X)$ тривиально

Теорема Безу

$f(x,y)$, $g(x,y)$ — многочлены степени не выше m и n, соответственно, с "общими" коэффициентами

Тогда система уравнений $f(x,y)=g(x,y)=0$ имеет $m \cdot n$ решений

Доказательство. $C_1 = \overline{\{f(x,y)=0\}} \subset \mathbb{C}P^2$, $C_2 = \overline{\{g(x,y)=0\}} \subset \mathbb{C}P^2$

это гладкие 2-мерные подмногообразия в 4-мерном $\mathbb{C}P^2$

$$\# C_1 \cap C_2 = [C_1] \cdot [C_2] \in H^4(\mathbb{C}P^2) = \mathbb{Z}$$

Но $[C_i] \in H^2(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $[C_1]$ и $[C_2]$ пропорциональны $u = [\mathbb{C}P^1]$

Мы утверждаем, что $[C_1] = \overset{m}{m}\, u$, $[C_2] = n u$ $\Rightarrow$ $[C_1]\cdot[C_2] = mn\,u^2 = mn\,[pt]$

$[C_1]\cdot[L] = \widetilde{m}\, u^2$

Вытекает из частного случая теоремы Безу, когда m или n равны 1, который сводится к "основной теореме алгебры"

Умножение в $H^*(G^{\mathbb{C}}_{2,4})$

$G_{2,4} = \{$проект. прямые в $\mathbb{P}^3\}$

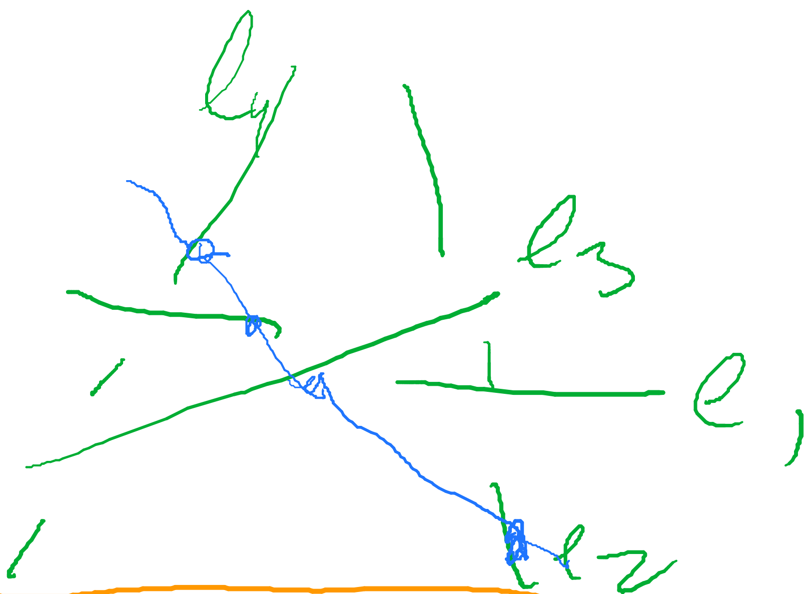
n	0	2	4	6	8
$H^n(G^{\mathbb{C}}_{2,4})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
образующие	$1=\sigma_\varnothing$	σ_1	σ_2, σ_{11}	σ_{21}	$\sigma_{22}=[pt]$

Поскольку присутствуют только чётные классы, умножение коммутативно

Таблица умножения (для семинара)

$$\sigma_1^2 = \sigma_2 + \sigma_{11}, \quad \sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_{11} = \sigma_{21},$$

$$\sigma_2\sigma_{11} = \sigma_1\sigma_{21} = \sigma_{2,2}, \quad \sigma_2^2 = \sigma_{11}^2 = 0.$$



__Следствие__ $\sigma_1^4 = (\sigma_2+\sigma_{11})^2 = 2\sigma_{22}$

Для общей четвёрки прямых в $\mathbb{CP}^3$ имеется ровно 2 прямые, пересекающие все 4 данные.

Классификация отображений $S^3 \to S^2$

Пример: расслоение Хопфа $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, $|z_1|^2+|z_2|^2=1$

$$p:(z_1,z_2)\mapsto [z_1:z_2] \in \mathbb{C}P^1 \cong S^2$$

$$p^{-1}(pt) = S^1$$

Утв. Отображения $f: S^3 \to S^2$ с точностью до гомотопии классифицируются целочисленным параметром, называемым инвариантом Хопфа $h(f)\in\mathbb{Z}$

- $\pi_3(S^2)=\pi_2(S^2)=\mathbb{Z}$. Это значит, что всякое отображение $f: S^3\to S^2$ гомотопно композиции $S^3 \xrightarrow[\text{расслоение Хопфа}]{} S^2 \xrightarrow[\text{отображение степени } h]{} S^2$
- пусть f – гладко. Тогда для общей точки $a\in S^2$ кривая $f^{-1}(a)\subset S^3$ – гладкая (набор ориентированных окружностей)

$$\boxed{h(f) = lk(f^{-1}(a), f^{-1}(b))}$$

В частности, слои расслоения Хопфа зацеплены попарно

Когомологическая интерпретация инварианта Хопфа

$f: S^3 \to S^2$

Используем f для приклейки к S^2 4-мерной клетки

Обозначим результат через X.

$X = \sigma_0 \cup \sigma_2 \cup \sigma_4$

Если f – расслоение Хопфа, то $X = \mathbb{C}P^2$

Аддитивная группа (ко)гомологий не зависит от f

n	0	1	2	3	4
$H_n(X)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$H^n(X)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
			u	u^2	v

Кольцевая структура в $H^*(X)$ зависит от f

Обозначим $u \in H^2(X) = \mathbb{Z}$, $v = H^4(X) = \mathbb{Z}$ образующие.

Тогда $\boxed{u^2 = h\,v}$

Обобщение умножения

Пусть (Y, X) — топологическая пара. Умножение определено в относительных когомологиях $H^*(Y, X)$

Имеется более общее умножение (задается ровно той же конструкцией)

$$H^*(X, A) \otimes H^*(X, B) \to H^*(X, A \cup B)$$

Оно не сводится к умножению в когомологиях одного пространства (пары)

$$H^*(X, A \cap B) \otimes H^*(X, A \cap B) \to H^*(X, A \cap B)$$

Теорема Пусть $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, где каждое из A_i стягиваемо. Тогда в $\tilde{H}^*(X)$ произведение любых n классов положительной размерности равно нулю.

Доказательство абсолютно тривиально:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(X, A_1) \otimes \ldots \otimes H^*(X, A_n) & \to & H^*(X, A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 0 \\ \wr\wr \qquad\qquad\qquad \wr\wr & & \downarrow \\ \tilde{H}^*(X) \otimes \ldots \otimes \tilde{H}^*(X) & \to & \tilde{H}^*(X) \end{array}$$

Категория Люстерника–Шнирельмана $cat(X)$ — минимальное n, такое, что $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, A_i - стягиваемы

Когомологическая длина $len(X)$ — максимальное k, такое, что $\exists\ u_i \in \overline{H}^*(X)$, $i=1,\dots,k$, такие что $u_1 \dots u_k \neq 0$

Теорема $\Longleftrightarrow$ $\boxed{cat(X) \geq len(X) + 1}$

Полезное упражнение (для семинара) — проверить, что неравенство точное для большого класса пространств — сферы, тора, проективного пространства

$len(P^n) = n \Rightarrow cat(P^n) \geq n + 1$

$len(T^2) = 2 \Rightarrow cat(T^2) \geq 3$

Найдите атлас на T^2 состоящий из 3 карт