Теория Морса

$f: M \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = C + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \dots$$

Критическая точка: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \iff b_1 = \dots = b_n = 0$

Критическая точка невырождена, если $\det \| a_{ij} \| \neq 0$

$$\iff f \sim C + (-x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2) + \dots$$

Индекс Морса невырожденной критической точки — k
(число отрицательных квадратов)

Пусть M^n — гладкое компактное многообразие

$f: M \to \mathbb{R}$ функция Морса, если:

- все критические точки невырождены
- все критические значения попарно различны

Утв. Функции "общего положения" являются функциями Морса.

Теорема. Существует клеточное разбиение на M, у которого клетки взаимно однозначно соответствуют критическим точкам данной функции Морса. Более того,

$$\left(\begin{array}{c}\text{критические точки}\\ \text{индекса } k\end{array}\right) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} (k\text{-мерные клетки})$$

Следствие. Имеется комплекс (комплекс Морса)

$$0 \leftarrow C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow C_2 \leftarrow \ldots$$

$C_k = \mathbb{Z}^{m_k}$, m_k - число кр. точек индекса k.

вычисляющий гомологии M

Следствие (Неравенства Морса)

$$m_k \geq b_k$$

$$m_k - m_{k-1} + \ldots + (-1)^k m_0 \geq b_k - b_{k-1} + \ldots + (-1)^k b_0$$

Следствие (двойственность Пуанкаре) $H_k(M) \cong H^{n-k}(M)$, если M — ориентировано.

Д-во: кр. точки функции f индекса k $\longleftrightarrow$ кр. точки функции $-f$ индекса $n-k$

Гомологический комплекс Морса для f $=$ Когомологический комплекс Морса для $-f$

Следствие. $\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i$

Следствие $n = \dim M$ нечётно $\Rightarrow \chi(M) = 0$

$$m_k(f) = m_{n-k}(-f)$$

Построение клеточного разбиения по функции Морса

$g = (\ ,\ )$ — риманова метрика

$v = -\operatorname{grad} f$ — векторное поле, направленное в сторону уменьшения функции

$$v \cdot f = df(v) = (\operatorname{grad} f, v) = -\|\operatorname{grad} f\|^2 \leq 0$$

Особые точки $v \Longleftrightarrow$ кр. точки функции f

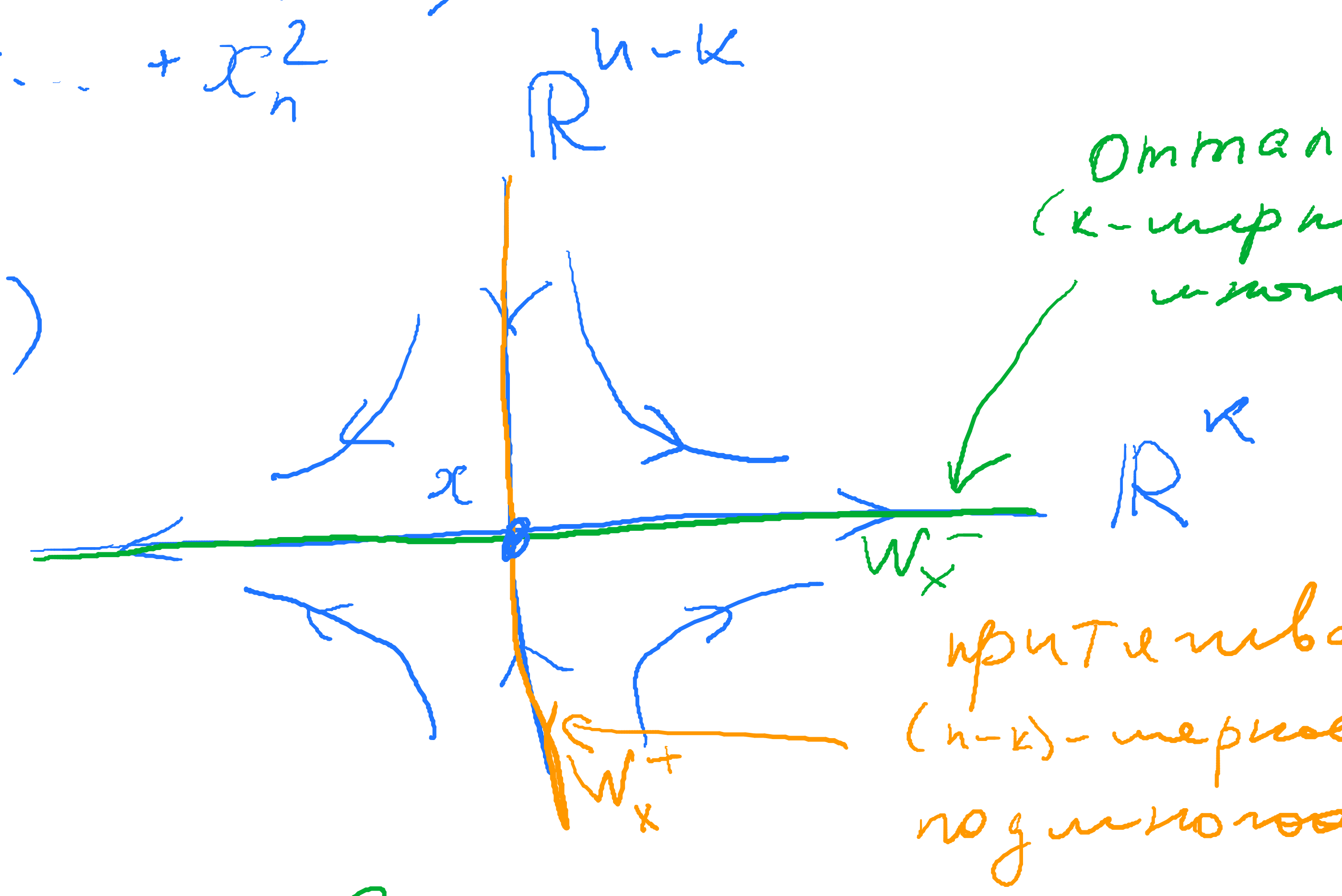
Модельный пример поведение в окр. кр. точки

$$f = -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

$$g = \frac{1}{2}\sum dx_i^2$$

$$v = (x_1, \ldots, x_k, -x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

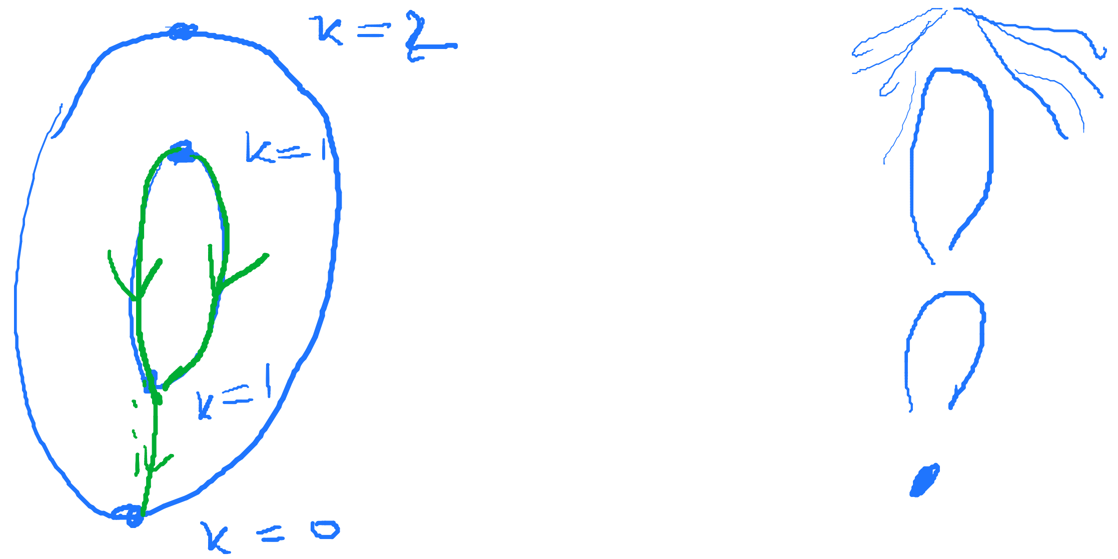
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \ldots \\ \dot{x}_k = x_k \\ \dot{x}_{k+1} = -x_{k+1} \\ \ldots \\ \dot{x}_n = -x_n \end{cases}$$



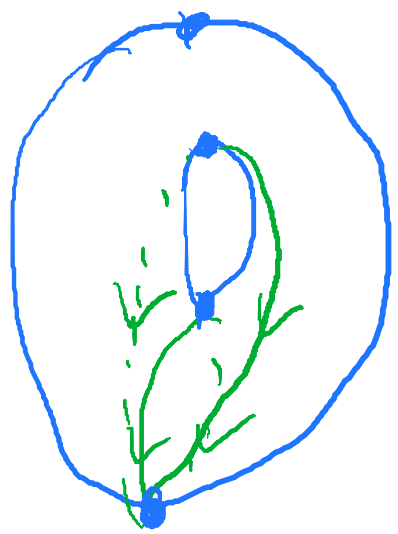
Из крит. точки индекса k выходит k-мерное отталкивающее сепаратрисное подмногообразие. Это подмногообразие является клеткой

Пример $M = T^2$

f – функция высоты



Разбиение примера не является клеточным: замыкание 1-клетки не лежит в 0-остове.



Пошевелим функцию (или метрику)

$$C_k \to C_{k-1}$$

$$\partial x = \sum_{\substack{\text{кр. точки } y \\ \text{индекса } k-1}} [x:y]\, y$$

$[x:y]$ = # траекторий, идущих из x в y (посчитанных со знаками)

$$\dim W^-_x \cap W^+_y = 1$$

k $\qquad$ $n-k+1$

Перестройки Морса

$$M^c = \{x \in M : f(x) \le c\}$$

$c \ll 0 \Rightarrow M^c = \varnothing \qquad c \gg 0 \Rightarrow M^c = M$

M^c не меняется, пока c меняется между кр. значениями.

Пусть x_0 — кр. точка индекса k, $c_0 = f(x_0)$.

Тогда $\boxed{M^{c_0+\varepsilon} \text{ получается из } M^{c_0-\varepsilon} \text{ приклейкой } k\text{-мерной клетки}}$

$$\partial(B^k \times S^{n-k-1}) = S^{k-1} \times S^{n-k-1} = \partial(S^{k-1} \times B^{n-k})$$

Обобщение: Теория Морса для некомпактных мн-гий

① $(M, \partial M)$ $f \equiv 0$ на ∂M и $f > 0$ на $M \setminus \partial M$

Комплекс Морса вычисляет относительные гомологии $H_*(M, \partial M)$

② Пример $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f = Q + \varphi$, где Q – кв. форма индекса k,
φ – с компактным носителем

Гомологии комплекса Морса равны

$$H_m(C_*) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$