

Графы на поверхностях  
Задача 3

Решения можно присылать по почте Амбург Наталье namburg@hse.ru.

Рассмотрим пространство комплексных матриц  $M_N(\mathbb{C})$  размера  $N \times N$  как  $2N^2$ -мерное действительное пространство,  $Z \in M_N(\mathbb{C})$ . Для  $F(Z)$  функции от элементов матрицы  $Z$  определим среднее для Гауссовой меры

$$\langle F(Z) \rangle = \frac{1}{\pi^N} \int_{M_N(\mathbb{C})} F(Z) \exp(-\text{Tr}(ZZ^+)) \prod_{1 \leq i, j \leq N} d\text{Re}(Z_{ij}) d\text{Im}(Z_{ij})$$

Все средние для функций в этой задаче это многочлены от размера матрицы, а коэффициенты многочленов связаны с суммированием по *детским рисункам Гротендика*. Выберите одно среднее из списка. Посчитайте его для нужного количества разных  $N$  явно, не используя связь с рисунками, и найдите коэффициенты многочлена. Нарисуйте соответствующие рисунки с указанием порядков групп автоморфизмов.

Задачи на 3 балла:

- $\langle \text{Tr}(Z^2)(\text{Tr}(Z))^4 \text{Tr}((Z^+)^6) \rangle$
- $\langle \text{Tr}(Z^6) \text{Tr}((Z^+)^2)(\text{Tr}(Z^+))^4 \rangle$

Задачи на 4 балла:

- $\langle \text{Tr}(Z^4) \text{Tr}(Z) \text{Tr}((Z^+)^3) \text{Tr}((Z^+)^2) \rangle$
- $\langle \text{Tr}((Z^+)^5) \text{Tr}(Z) (\text{Tr}(Z^2))^2 \rangle$
- $\langle \text{Tr}(Z^4) \text{Tr}((Z^+)^4) \rangle$