Аксиомы теории гомологий

Теорема. Сингулярные гомологии клеточных пространств совпадают с клеточными.

(Сингулярные) гомологии сопоставляют топологическому пространству (или паре) группы гомологий

$$X \rightsquigarrow H_n(X)$$

$$(X, A) \rightsquigarrow H_n(X, A)$$

I Функториальность

$f : X \to Y \qquad f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

II Гомотопическая инвариантность

$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \qquad f \sim g \Longrightarrow f_* = g_*$

(При гомотопиях f_* не меняется)

Следствие. $X \sim Y$ (гомотопически эквивалентны)

$$\Longrightarrow H_n(X) \cong H_n(Y)$$

III Изоморфизм вырезания

(X, A) топологическая пара

U открыто, $\overline{U} \subset A$

$$\Rightarrow \quad H_n(X, A) \cong H_n(X \setminus U, A \setminus U)$$

Следствие. (X, A) — клеточная пара $\Rightarrow$

$$H_n(X, A) \cong \overline{H}_n(X/A)$$

IV Связывающий гомоморфизм

$$H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A),$$

длинная точная последовательность

и её функториальность:

отображение пар индуцирует гомоморфизм данных точных последовательностей

V Гомология точки

$$H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases}$$

Свойства (аксиомы) теории гомологий

I Функториальность

II Гомотопическая инвариантность

III Изоморфизм вырезания и $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$

IV Длинная точная последовательность пары

V Гомологии точки

Теорема. Для клеточных пространств все теории гомологий, удовлетворяющие аксиомам, совпадают

Следствие. Клеточные гомологии клеточных пространств изоморфны сингулярным

Идея доказательства:

Построить алгоритм вычисления гомологий, который использует только аксиомы

Более явно:

Использовать данные точные последовательности для различных троек пространств из фильтрации

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots \subset X$$

где X_k - k-мерный остов.

Первый шаг

- Изоморфизм надстройки

$H_n(\Sigma X) \cong H_{n-1}(X)$ (из точной последовательности пары (CX, X))

- Вычисление гомологии сферы $S^n = \Sigma S^{n-1}$

а также букета сфер $S^n \vee S^n \vee \ldots \vee S^n$

индукцией по n

$$\overline{H}_k(\vee S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\#\text{сфер}} & , k = n \\ 0 & , k \neq n \end{cases}$$

(Начальный шаг индукции — букет 0-мерных сфер)

Второй шаг

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X$$

$$X_k / X_{k-1} \cong \underset{\substack{\text{k-мерные} \\ \text{клетки}}}{\bigvee} S^k$$

Определение.

$$C_k(X) = H_k(X_k / X_{k-1}) \quad \left(\cong \mathbb{Z}^{\# \text{ k-клеток}}\right)$$

Определение:

$$\begin{array}{ccc} C_k(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1}(X) \\ \| & & \| \\ H_k(X_k, X_{k-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) \end{array}$$

Связывающий гомоморфизм из точной последовательности тройки (X_k, X_{k-1}, X_{k-2}), т. е. пары $(X_k/X_{k-2}, X_{k-1}/X_{k-2})$

$$0 \leftarrow C_0(X) \xleftarrow{\partial_1} C_1(X) \xleftarrow{\partial_2} C_2(X) \xleftarrow{\partial_3} \ldots$$

Нужно проверить

- $\partial \circ \partial = 0$
- ∂ совпадает с граничным оператором комплекса клеточных цепей
- гомологии комплекса равны (сингулярным) гомологиям пространства X

Изменение гомологий при приклеивании одной n-мерной клетки

$$\varphi: S^{n-1} = \partial B^n \to X \quad \longrightarrow \quad Y = X \cup_\varphi B^n \; ; \; Y/X \cong S^n$$

$$0 \to H_k(X) \to H_k(Y) \to 0 \qquad (k \neq n, n-1)$$

$$0 \to H_n(X) \to H_n(Y) \to \underbrace{H_n(Y/X)}_{\cong\mathbb{Z}} \to H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(Y) \to 0$$

Вывод: могут поменяться только группы H_n или H_{n-1},

т.е. $H_k(X) \cong H_k(Y)$ при $k \neq n, n-1$

$$\boxed{\text{Следствие. } \quad H_n(X) = H_n(X_{n+1}, X_{n-2})}$$

Третий шаг

$$(X_n, X_{n-1}, X_{n-2})$$

$$\begin{tikzcd}
 & & H_n(X_{n-1}, X_{n-2}) \arrow[d] & & \\
(X_{n+1}, X_n, X_{n-2}): & H_{n+1}(X_{n+1}, n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_n(X_n, X_{n-2}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_{n+1}, X_{n-2}) \arrow[r] & H_n(X_{n+1}, X_n) \\
(X_{n+1}, X_n, X_{n-1}): & H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[r] & H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[d] & & \\
 & & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & &
\end{tikzcd}$$

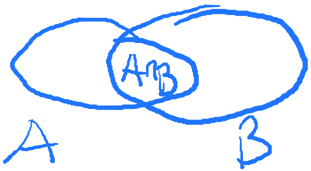
$$
\begin{tikzcd}
 & \overset{0}{H_n(X_{n-1}, X_{n-2})} \arrow[d] & & \\
\overset{C_{n+1}}{H_{n+1}(X_{n+1}, X_n)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \overset{Z_n}{H_n(X_n, X_{n-2})} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{H_n(X)}{H_n(X_{n+1}, X_{n-2})} \arrow[r] & \overset{0}{H_n(X_{n+1}, X_n)} \\
\overset{C_{n+1}}{H_{n+1}(X_{n+1}, X_n)} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & \overset{C_n}{H_n(X_n, X_{n-1})} \arrow[d, "\partial_n"'] & & \\
 & \overset{C_{n-1}}{H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})} & &
\end{tikzcd}
$$

Последовательность Майера-Вьеториса

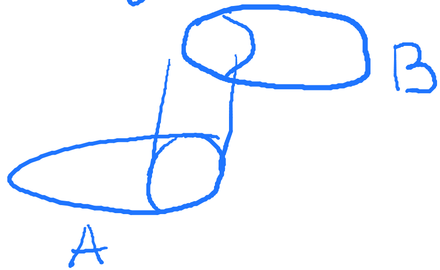
$X = A \cup B$

$$\ldots \to H_n(A\cap B) \to H_n(A)\oplus H_n(B) \to H_n(A\cup B) \to H_{n-1}(A\cap B) \to H_{n-1}(A)\oplus H_{n-1}(B) \to \ldots$$

Доказательство для случая, когда A, B – клеточные



$\rightsquigarrow$ $Y =$



$(Y, A \sqcup B)$

$$H_n(Y) = H_n(X), \quad H_n(A\sqcup B) = H_n(A)\oplus H_n(B)$$

$$H_n(Y/(A\sqcup B)) = H_n(\Sigma(A\cap B)) = H_{n-1}(A\cap B)$$

Пример применения

Теорема. Симплициальные гомологии симплициального множества изоморфны сингулярным.

Доказательство. Имеется естественный гомоморфизм цепных комплексов

$$C_*^{simpl} \longrightarrow C_*^{sing}$$

Докажем, что он индуцирует изоморфизм гомологий.

- это верно для случая, когда X – симплекс
- Из М-В и 5-леммы вытекает, что если это верно для подпространств $A, B, A \cap B$, то верно и для $A \cup B$

Утверждение теоремы получается индукцией по числу симплексов

Важно: изоморфизм гомологий индуцируется гомоморфизмом комплексов