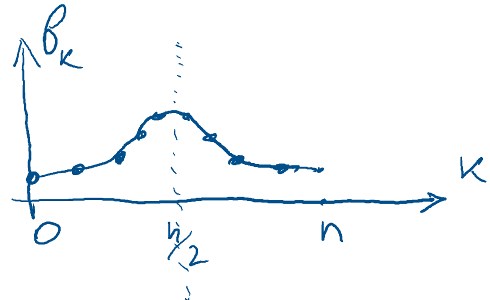
Гомологии многообразий и двойственность Пуанкаре

Пусть M – гладкое компактное многообразие

Простейшее проявление двойственности – симметрия чисел Бетти

$$\boxed{b_k = b_{n-k}}$$



Справедливо для • $\mathbb{Q}$-чисел Бетти, если M ориентируемо
• $\mathbb{Z}_2$-чисел Бетти в общем случае

Следствие: M нечетномерно $\Rightarrow \chi(M) = 0$

Истинная формулировка двойственности Пуанкаре:

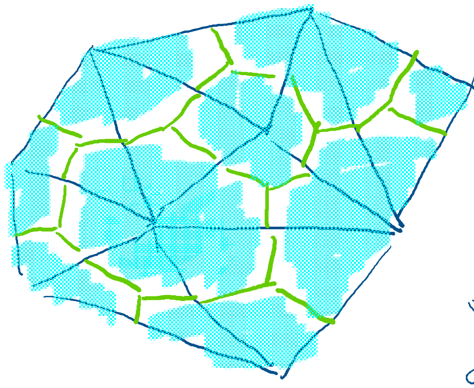
Теорема. M – гладкое компактное, $\dim M = n$

M – ориентируемо: $H_k(M) \cong H^{n-k}(M)$

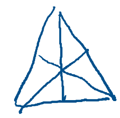
в общем случае: $H_k(M; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$

Изоморфизм теоремы естественный и имеет место с учётом кручения.

Доказательство. Выберем триангуляцию K многообразия M и перейдем к "двойственному" клеточному разбиению K^*



1) Переходим к барицентрическому подразбиению



2) Каждому симплексу исходной триангуляции сопоставляем его "звезду" — объединение примыкающих симплексов дополнительной размерности в барицентрическом подразбиении.

Двойственное разбиение является клеточным (не симплициальным)

Имеется биекция

$$\left\{\begin{array}{c}k\text{-симплексы}\\ \text{исходного}\\ \text{симплициального}\\ \text{разбиения } K\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{array}{c}(n-k)\text{-клетки}\\ \text{двойственного}\\ \text{клеточного}\\ \text{разбиения } K^*\end{array}\right\}$$

А следовательно, изоморфизм

$$C_k(K) \cong C^{n-k}(K^*)$$

Этот изоморфизм коммутирует с операцией взятия (ко)границы

$$\begin{tikzcd} C_k(K) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & C_{k-1}(K) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ C^{n-k}(K^*) \arrow[r, "\delta"] & C^{n-k+1}(K^*) \end{tikzcd}$$

(Для этого нужно выбрать согласованные ориентации симплексов в K, клеток в K^* и многообразия M. Либо рассматривать комплексы с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$)

Иными словами, цепной комплекс $C_*(K)$ разбиения K — это то же самое, что и коцепной комплекс $C^*(K^*)$ разбиения K^*, с точностью до обращения нумерации групп.

Изоморфизм теоремы вытекает из того, что (ко)гомологии не зависят от выбора клеточного разбиения. ☐

$$\begin{tikzcd} H_k(M) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & H^k(M) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{двойственность}"] \arrow[dl, dash] \\ H_{n-k}(M) \arrow[r, leftrightarrow] & H^{n-k}(M) \end{tikzcd}$$

изоморфизмы

Напомним, что $H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & M \text{ ориентируемо} \\ 0, & M \text{ неориентируемо} \end{cases}$

$H_n(M;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ во всех случаях

Образующая группы $H_n(M)$ называется **фундаментальным классом** $[M]$.

Более явно, $[M]$ — сумма n-мерных симплексов (взятых с ориентациями, индуцированными из ориентации M)

Следствие. Всякое (ориентированное) k-мерное компактное подмногообразие задает k-мерный класс гомологий

$i: X \hookrightarrow M \qquad i_*: H_k(X) \to H_k(M)$

$i_*[X] \in H_k(M)$

Вместо вложения можно взять произвольное отображение $f: X \to M$. Тогда $f_*[X] \in H_k(M)$

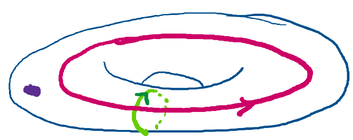
Вывод: классы гомологий можно представлять "циклами". k-мерный цикл — это

- k-мерное подмногообразие, или
- образ k-мерного многообразия при непрерывном отображении

Важно: всякий цикл должен быть

- компактным
- ориентированным (или рассматриваются гомологии с к-ми в $\mathbb{Z}_2$)

Пример. $M = T^2$



n	$H_n(T^2)$	образующие
0	$\mathbb{Z}$	точка (любая)
1	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	параллель, меридиан (любые)
2	$\mathbb{Z}$	сам тор

В этом описании можно не упоминать, какое клеточное (симплициальное) разбиение используется при вычислении гомологий.

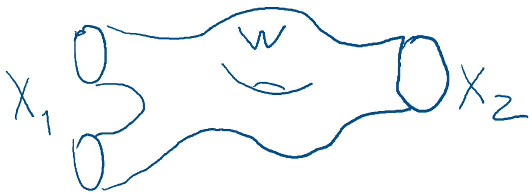
Пример $M = T^2 \setminus \{pt\}$

$H_0(M) = H_0(T^2) = \mathbb{Z}$
$H_1(M) = H_0(T^2) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

} точка, параллель, меридиан присутствуют на M в качестве циклов

$H_2(M) = 0$: двумерные (компактные) циклы отсутствуют

Если имеется $(k+1)$-мерное подмногообразие W "плёнка" с краем $X_1 \sqcup X_2$, то $[X_1] = [X_2]$



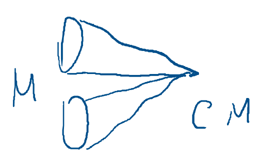
Имеется соблазн формализовать это отношение эквивалентности (под)многообразий и построить на его основе "обобщенную теорию гомологий". Такая теория существует и называется **теорией кобордизмов**

Эта теория <u>более сложная</u>, чем теория гомологий. Например, в ней даже у точки "обобщенные гомологии" нетривиальны:

- $\mathbb{R}P^2$ не является границей никакого 3-мерного многообразия
- $\mathbb{C}P^2$ не является границей никакого 5-мерного ориентированного многообразия

Слегка обобщая, можно допустить, что цикл — многообразие с особенностями, при условии, что особые точки образуют подмножество размерности $\leq n-2$.

Для таких "циклов с особенностями" всякое многообразие является границей своего конуса.

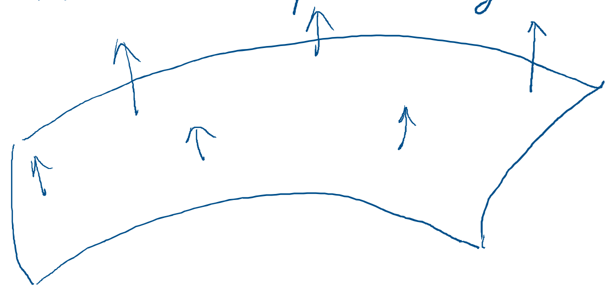


Когомологии

Двойственность Пуанкаре позволяет придать геометрический смысл когомологиям.

Опр. k-Коцикл — гладкое **замкнутое, коориентированное** подмногообразие **ко**размерности k

Коориентация подмногообразия — ориентация пространства, дополнительного к нормальному

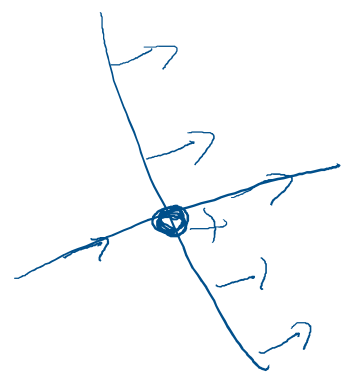


Если объемлющее многообразие ориентировано, то коориентация $\longleftrightarrow$ ориентация

Если есть два подмногообразие

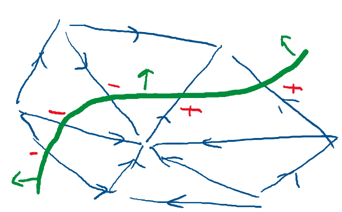
- ориентированное размерности k
- коориентированное коразмерности k

то в каждой точке трансверсального пересечения определен их локальный **индекс пересечения** ± 1



Пусть $X \subset M$ коцикл коразмерности k в общем положении по отношению к некоторой триангуляции K на M. Тогда индекс пересечения задает k-мерную коцепь $f_X \in C^k(K)$

$$f_X(\Delta) = (X \cdot \Delta)$$

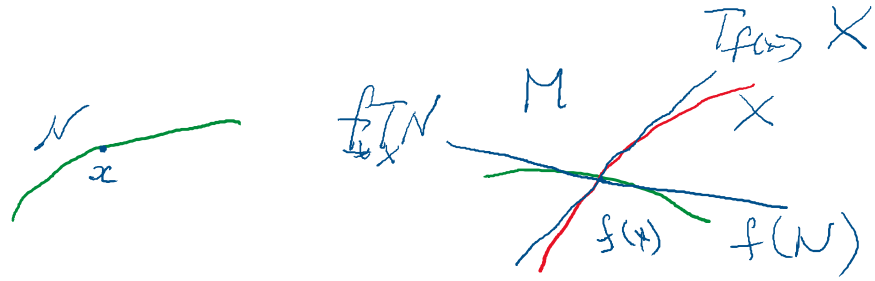


Эта коцепь замкнута и задает класс когомологий

$$[X] \in H^k(M)$$

В это соответствие хорошо укладывается описание гомоморфизма обратного образа в когомологиях

$f: N \to M \qquad f^k: H^k(M) \to H^k(N)$



Опр. Пусть $f(x) \in X \subset M$. f называется **трансверсальным** в x по отношению к X, если $f_*(T_x N) + T_{f(x)} X = T_{f(x)} M$

Общее отображение трансверсально к X во всех точках. В этом случае, по теореме о неявной функции подмногообразие

$f^{-1}(X) \subset N$

- гладкое коразмерности k
- коориентированное
- представляет класс $f^*[X] \in H^k(N)$

f_* переводит цикл X в N в цикл $f(X)$ в M

f^* переводит коцикл X в M коцикл $f^{-1}(X)$ в N

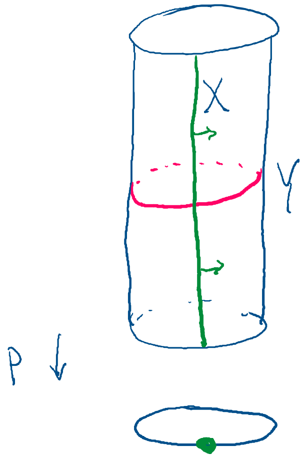
Если $X^k \subset M^n$ компактно, ориентировано, то

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr, squiggly] & \\ {[X] \in H_k(M)} & & {[X] \in H^{n-k}(M)} \end{tikzcd}$$

Это согласуется с двойственностью Пуанкаре

В общем случае циклы и коциклы — разные вещи

Пример $M = S^1 \times \mathbb{R} \sim S^1$



$$[Y] \in H_1(M) \overset{p_*}{\cong} H_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

$$[X] \in H^1(M) \overset{p^*}{=} H^1(S^1) = H_0(S^1) = \mathbb{Z}$$

$$X = p^{-1}(\bullet)$$

Замечания:

- как коцикл, $[Y] \in H^1(M)$ корректно определен, но равен нулю
- индекс пересечения $(X \cdot Y) = 1$ — отражает двойственность между $H_1(M)$ и $H^1(M)$

Двойственность Пуанкаре для некомпактных многообразий

Пусть некомпактное многообразие имеет вид $M \setminus \partial M$, где M — (компактное, связное) многообразие с краем.

$$M \setminus \partial M \sim M \implies \begin{array}{l} H_k(M \setminus \partial M) = H_k(M) \\ H^k(M \setminus \partial M) = H^k(M) \end{array}$$

Определение.

$$H_k(M, \partial M) = \tilde{H}_k(M/\partial M) = \begin{cases} H_k(M/\partial M), & k > 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

$$H^k(M, \partial M) = \tilde{H}^k(M/\partial M) = \begin{cases} H^k(M/\partial M), & k > 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

Теорема. Пусть M ориентируемо (или гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$)

$$H_k(M) \cong H^{n-k}(M, \partial M)$$

$$H^k(M) \cong H_{n-k}(M, \partial M)$$

Замечание. $M/\partial M$ не является гладким многообразием и эти два изоморфизма не вытекают друг из друга

X	X
подмногообразие без края	подмногообразие с краем, лежащим в ∂M
$\dim X = k$	$\dim X = k$
ориентированное:	коориентированное:
$H_k(M)$	$H^{n-k}(M)$
Коориентированное:	ориентированное:
$H^{n-k}(M, \partial M)$	$H_k(M, \partial M)$

Задача (К.р.-1 задача 2а)

Вычислить гомологии пространства $M = \mathbb{R}P^3 \setminus \{pt\}$

Решение

$$H_k(M) = H_k(\mathbb{R}P^3 \setminus B^3) = H^{3-k}(\mathbb{R}P^3, B^3) = \tilde{H}^{3-k}(\mathbb{R}P^3)$$

n	0	1	2	3
$H_n(\mathbb{R}P^3)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
$H^n(\mathbb{R}P^3)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
$\tilde{H}^n(\mathbb{R}P^3)$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
$H_k(M) \cong \tilde{H}^{3-n}(\mathbb{R}P^3)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	0

В действительности, $M \sim \mathbb{R}P^2$

Задача M – полноторий.

Вычислить гомологии фактора $M/\partial M$

Варианты решений
- из клеточного разбиения
- из точной последовательности пары
- из двойственности Пуанкаре

$$H_k(M, \partial M) = H^{3-k}(M) = H^{3-k}(S^1)$$

k	0	1	2	3
$H^k(S^1)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0
$H_k(M, \partial M) \cong H^{3-k}(S^1)$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$H_k(M/\partial M)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$