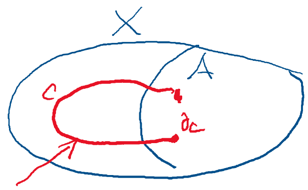
Длинная точная последовательность пары

Топологическая пара (X, A) $\quad A \subset X$

Опр. Относительные цепи $C_k(X,A) = C_k(X)/C_k(A)$

$$0 \leftarrow C_0(X,A) \leftarrow C_1(X,A) \leftarrow C_2(X,A) \leftarrow \dots$$

Гомологии комплекса относительных цепей называются **относительными гомологиями**. Обозначение: $H_k(X,A)$



$[c] \in H_k(X,A)$

относительный цикл: $\partial c \subset A$

Пример. Приведенные гомологии

$$\tilde H_k(X) = H_k(X, pt) = \begin{cases} H_k(X), & k>0 \\ H_0(X)/\mathbb{Z}, & k=0 \end{cases} \quad (=0, \text{ если } X \text{ связно})$$

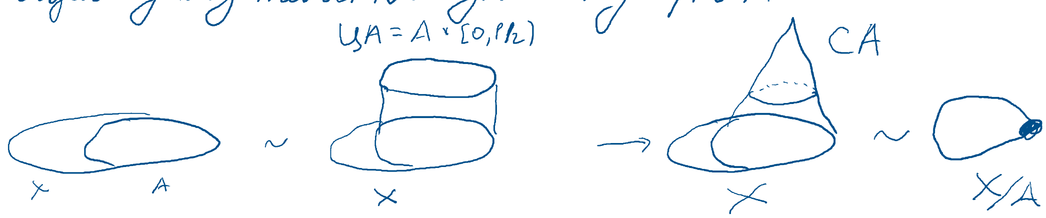
Теорема. (X,A) — клеточная пара $\Rightarrow$

$$H_k(X,A) = \tilde H_k(X/A)$$

Для случая клеточных гомологий теорема очевидна (докажите)

Идея доказательства для сингулярных:

$ЦA = A \times [0,1/2)$



$(X,A) \sim (X\cup ЦA, ЦA) \longrightarrow (X\cup CA, CA) \sim (X/A, pt)$

гомот. экв-ть

"изоморфизм вырезания": $H_k(X\cup ЦA, ЦA) \cong H_k(X\cup CA, CA)$

гомот. экв-ть

нужно показать, что всякий цикл в $(X\cup CA, CA)$ гомологичен циклу, лежащему в $X \cup ЦA$

Опр. Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\ldots \to A \to B \to C \to \ldots$$

называется **точной**, если ядро следующего равно образу предыдущего.
Это "почти то же самое", что комплекс с нулевыми гомологиями.
Отличие в том, что в цепном комплексе нумерация групп — часть структуры

Примеры

$0 \to A \xrightarrow{f} B \iff f$ инъективно

$A \xrightarrow{f} B \to 0 \iff f$ сюръективно

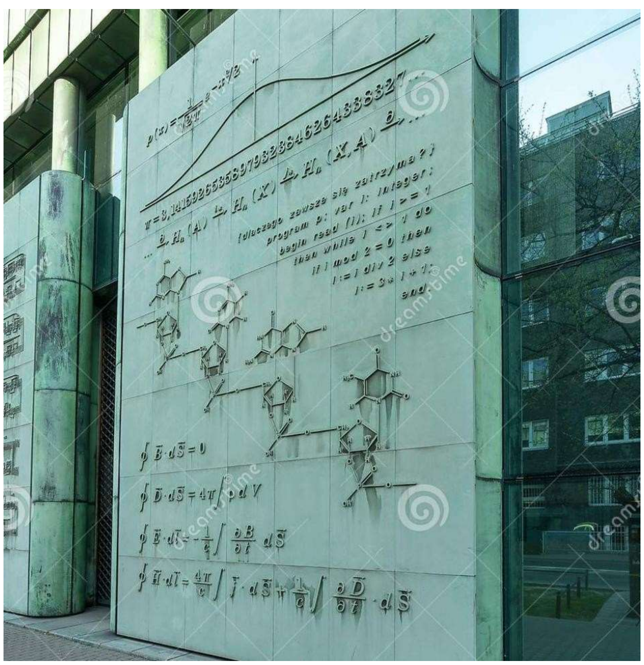
$0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0 \iff f$ изоморфизм

Короткая точная последовательность

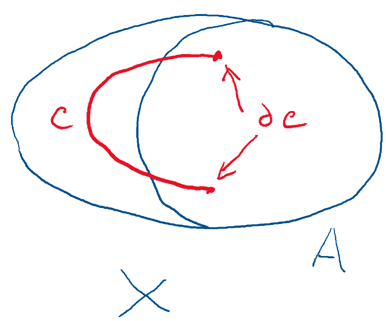
$$0 \to A \to B \to C \to 0 \iff A \subset B,\ C = B/A$$

Теорема (длинная точная последовательность пары)

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} \ldots$$



Фасад библиотеки университета Варшавы



$[c] \in H_n(X,A)$

$[\partial c] \in H_{n-1}(A)$

Пример $\quad X=\mathbb{R}P^2,\ A=\mathbb{R}P^1\simeq S^1,\quad X/A\cong S^2$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
H_2(A) & \to & H_2(X) & \xrightarrow{0} & H_2(X/A) & 0 & \to & ? & \to & \mathbb{Z} \\
H_1(A) & \to & H_1(X) & \to & H_1(X/A) & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}_2 & \to & 0 \\
H_0(A) & \to & H_0(X) & \to & \tilde{H}_0(X/A) & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} & \to & 0
\end{array}$$

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{2}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2\to 0$$
$$0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\to 0$$

$$0\to H_2(\mathbb{R}P^2)\xrightarrow{0}\qquad\Rightarrow\quad H_2(\mathbb{R}P^2)=0$$
$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{2}\mathbb{Z}\to H_1(\mathbb{R}P^2)\to 0\quad\Rightarrow\quad H_1(\mathbb{R}P^2)=\mathbb{Z}_2$$
$$0\to\mathbb{Z}\to H_0(\mathbb{R}P^2)\to 0\quad\Rightarrow\quad H_0(\mathbb{R}P^2)=\mathbb{Z}$$

Пример $\quad (X,A)=(B^n,\partial B^n)\quad X\sim pt,\ A\sim S^{n-1},\ X/A\sim S^n.$

$$\underset{H_k(B^n)}{\overset{\parallel}{0}}\to H_k(B^n,\partial B^n)\to\underset{H_{k-1}(\partial B^n)}{\overset{\parallel}{0}},\quad k\neq n\ \Rightarrow\ H_k(B^n,\partial B^n)=0$$

$$\underset{H_n(B^n)}{\overset{\parallel}{0}}\to H_n(B^n,\partial B^n)\to\underset{H_{n-1}(\partial B^n)}{\overset{\parallel}{\mathbb{Z}}}\to\underset{H_{n-1}(B^n)}{\overset{\parallel}{0}}\ \Rightarrow\ H_n(B^n,\partial B^n)=\mathbb{Z}$$

Получаем вычисление гомологий сферы

$$\tilde{H}_k(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}\qquad \text{индукцией по } n$$

Пример Изоморфизм надстройки

$\to CX/X\sim\Sigma X$

$$\tilde{H}_k(\Sigma X)\cong H_{k-1}(X)$$

$\Leftarrow$ из длинной точной последовательности пары (CX,X)

$CX\sim pt$
$$\underset{H_k(pt)}{\overset{\parallel}{0}}\to H_k(\Sigma X)\xrightarrow{\partial}H_{k-1}(X)\to\underset{H_{k-1}(pt)}{\overset{\parallel}{0}}$$

(X, A) клеточная пара $\rightsquigarrow (Y, X)$

$Y = X \cup CA \sim X/A$, $Y/X \sim \Sigma A$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\to H_n(A) & \to & H_n(X) & \to & H_n(X/A) & \to & H_{n-1}(A) & \to & H_{n-1}(X) & \to & H_{n-1}(X/A) & \to \\
\wr & & \wr & & \wr & & \wr & & \wr & & \wr & \\
H_{n+1}(Y/X) & \to & H_n(X) & \to & H_n(Y) & \to & H_n(Y/X) & \to & H_{n-1}(X) & \to & H_{n-1}(Y) & \to
\end{array}$$

$\boxed{\text{Вывод: роль пространства, подпространства и факторпространства, гомологии которых участвует в длинной точной последовательности, условна, и может циклически переставляться}}$

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \\
\wr & & \wr \\
H_n(Y) & \xrightarrow{p_*} & H_n(Y/X)
\end{array}$$

$p: Y \to Y/X$

$\boxed{\text{Вывод: связывающий гомоморфизм } \partial \text{ точной последовательности пары выражается через изоморфизм надстройки (и гомоморфизм прямого образа)}}$

В какой мере известные гомологии двух пространств из $X, A, X/A$ определяют гомологии третьего пространства?

$$\xrightarrow{\partial_{n-1}} H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A)$$

$$0 \to \operatorname{coker}\partial_{n-1} \to H_n(X) \to \ker \partial_n \to 0$$

Вывод: Известные гомологии $H_n(A)$, $H_n(X/A)$ и связывающий гомоморфизм $\partial: H_n(X/A) \to H_{n-1}(A)$ для всех n выражают $H_n(X)$ как центральный член короткой точной последовательности

Примеры: $0 \to \mathbb{Z}_2 \to ? \to \mathbb{Z} \to 0 \quad \Rightarrow ? = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} ? \to \mathbb{Z}_2 \to 0 \quad \Rightarrow \begin{array}{l} \text{либо } ? = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \\ \text{либо } ? = \mathbb{Z} \text{ и } f - \text{умножение на } 2 \end{array}$$

В общем случае
$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

Одна из возможностей $B = A \oplus C$. Говорят, что короткая точная последовательность расщепляется

Не всякая последовательность расщепляется

Задача: C свободна $\Rightarrow$ расщепляется

Таким образом, в общем случае при восстановлении гомологий X по известным гомологиям A и X/A остаётся небольшая неоднозначность (в кручении)

Имеется случай, когда эта неоднозначность пропадает: если у вычисляемых гомологий имеется "естественный кандидат"

Опр. Отображение пар $(X,A) \to (Y,B)$ — это отображение $f: X \to Y$, такое что $f(A) \subset B$

$$f_* : \begin{cases} H_k(X) \to H_k(Y) \\ H_k(A) \to H_k(B) \\ H_k(X,A) \to H_k(Y,B) \end{cases}$$

Теорема. Пусть $f: (X,A) \to (Y,B)$ индуцирует изоморфизм двух из трех серий гомологий пространств из длинной точной последовательности. Тогда f_* изоморфизм и для третьей серии гомологий

Утверждение теоремы — следствие алгебраического утверждения, называемого леммой о пяти гомоморфизмах, или 5-леммой

Теорема. Пусть дана коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \to & A_2 & \to & A_3 & \to & A_4 & \to & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_5} \\ B_1 & \to & B_2 & \to & B_3 & \to & B_4 & \to & B_5 \end{array}$$

Тогда, если $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ — изоморфизмы, то и φ_3 - изоморфизм

Задача. В приведенной теореме 2 утверждения (инъективность и сюръективность φ_3) и 8 предпосылок (инъективность и сюръективность $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$). Определите, какие из этих 8 предпосылок нужны для доказательства инъективности (соотв., сюръективности) φ_3, а какие не используются вовсе.