## • Гомологии и когомологии с коэффициентами в абелевой группе

$X = \cup \sigma_\alpha$ клеточное пространство

$0 \leftarrow C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \leftarrow \dots$

$C_k \cong \mathbb{Z}^{m_k}$, где $m_k$ – количество $k$-мерных клеток

$H_k(X) = H_k(C_\bullet)$ — абелева группа

$H_k(X) = \underbrace{\mathbb{Z}^{b_k}}_{\text{свободная часть}} \oplus \underbrace{\bigoplus_i \mathbb{Z}_{d_{k,i}}}_{\text{кручение}}$

$b_k$ – числа Бетти

---

$A$ – абелева группа (например $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$)

$C_k(A) = C_k \otimes A \cong A^{m_k}$ — формальные линейные комбинации $k$-мерных клеток с коэффициентами в $A$

$0 \leftarrow C_0(A) \xleftarrow{\partial} C_1(A) \xleftarrow{\partial} C_2(A) \leftarrow \dots$

Опр. $H_k(X;A)$ – гомологии этого комплекса

$C^k(A) = Hom_{\mathbb{Z}}(C_k, A) = Hom_A(C_k(A), A) \cong A^{m_k}$ — пространство (группа) $A$-значных функций на множестве $k$-мерных клеток

$0 \to C^0(A) \xrightarrow{\delta} C^1(A) \xrightarrow{\delta} C^2(A) \xrightarrow{\delta} \dots$

- коцепи
- кограничный гомоморфизм $\quad \delta f(a) := f(\partial a)$
- коциклы
- кограницы

матрица оператора $\delta$ сопряжена (транспонирована) матрице оператора $\partial$

когомологии

$H^k(X;A) = \dfrac{k\text{-мерные коциклы}}{k\text{-мерные кограницы}}$

## Пример $X = \mathbb{R}P^3$

$C_\bullet \quad 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$

$C_\bullet(\mathbb{R}) \quad 0 \leftarrow \mathbb{R} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \xleftarrow{\cong} \mathbb{R} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \leftarrow 0$

$C_\bullet(\mathbb{Z}_2) \quad 0 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \leftarrow 0$

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $H_k(\mathbb{R}P^3)$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}_2$ | 0 | $\mathbb{Z}$ |
| $H_k(\mathbb{R}P^3, \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 0 | $\mathbb{R}$ |
| $H_k(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2)$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ |

$C^\bullet(\mathbb{Z}) \quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$

$C^\bullet(\mathbb{R}) \quad 0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{0} \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \xrightarrow{0} \mathbb{R} \to 0$

$C^\bullet(\mathbb{Z}_2) \quad 0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \to 0$

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $H^k(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Z})$ | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}$ |
| $H^k(\mathbb{R}P^3, \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 0 | $\mathbb{R}$ |
| $H^k(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2)$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ |

## Свойства

- Если $A$ — поле, то $H_k(X;A)$ — векторное пр-во
  (например, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p \dots$)

  $\Rightarrow H_k(X;A) \cong A^{b_k}$

  $H^k(X;A) \cong A^{b_k}$ — двойственное векторное пр-во

  $b_k = b_k(A) = \dim H_k(X;A)$ зависит от поля

  Если $A = \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (т.е. х-ки 0)
  то $b_k$ = ранг свободной части в $H_k(X)$

- Гомоморфизмы прямого и обратного образа

  $f: X \to Y \rightsquigarrow$ $f_*: H_k(X;A) \to H_k(Y;A)$

  $f^*: H^k(Y;A) \to H^k(X;A)$

- Для произвольной $A$ имеются гомоморфизмы

  $H_k(X) \otimes A \longrightarrow H_k(X;A)$ инъективный

  $H^k(X;A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_k(X;A), A)$ сюръективный

  которые в общем случае не являются изоморфизмами

**Теорема** ("Формула универсальных коэффициентов")
Группы $H_k(X)$ однозначно определяют группы $H_k(X;A)$ и $H^k(X;A)$ для произвольной $A$

Алгоритм:
- даны группы $H_k(X)$
- строим „модельный" комплекс, реализующий эти группы (и не имеющий отношения к клеточному)
- переходим в модельном комплексе к к-там $A$

| | $k$ | |
|---|---|---|
| $H_k(X)$ | $\mathbb{Z}$ | $0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0$ |
| $H_k(X,\mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $0 \leftarrow \mathbb{R} \leftarrow 0$ |
| $H_k(X,\mathbb{Z}_2)$ | $\mathbb{Z}_2$ | $0 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \leftarrow 0$ |
| $H^k(X,\mathbb{Z})$ | $\mathbb{Z}$ | $0 \to \mathbb{Z} \to 0$ |
| $H^k(X,\mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $0 \to \mathbb{R} \to 0$ |
| $H^k(X,\mathbb{Z}_2)$ | $\mathbb{Z}_2$ | $0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ |

| | $k$ | $k+1$ | |
|---|---|---|---|
| $H_k(X)$ | $\mathbb{Z}_2$ | $0$ | $0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \leftarrow 0$ |
| $H_k(X,\mathbb{R})$ | $0$ | $0$ | $0 \leftarrow \mathbb{R} \xleftarrow{\cong} \mathbb{R} \leftarrow 0$ |
| $H_k(X,\mathbb{Z}_2)$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $0 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \leftarrow 0$ |
| $H^k(X,\mathbb{Z})$ | $0$ | $\mathbb{Z}_2$ | $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to 0$ |
| $H^k(X,\mathbb{R})$ | $0$ | $0$ | $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \to 0$ |
| $H^k(X,\mathbb{Z}_2)$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \to 0$ |

Пример

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $H_k(\mathbb{R}P^3)$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}_2$ | $0$ | $\mathbb{Z}$ |
| $H_k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{Z}_2)$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ |
| $H^k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{Z}_2)$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ |
| $H^k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{Z})$ | $\mathbb{Z}$ | $0$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}$ |
| $H_k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{R})$, $H^k(\mathbb{R}P^3,\mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $0$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |

Гомоморфизм Бокштейна $\beta$

$$H_{k+1}(X,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} H_k(X,\mathbb{Z})$$

$$\beta(a) = \frac{1}{2}\partial a \in H_k(X,\mathbb{Z})$$

**Следствие** $H_k(X) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus Tor_k$ $\quad Tor_k \cong Tor^{k+1}$

$H^k(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus Tor^k$

**Теорема** (Обращение формулы универсальных к-тов)
Группы $H_k(X,\mathbb{Q})$ и $H_k(X,\mathbb{Z}_{p^m})$ однозначно определяют $H_k(X)$
(а значит, и $H_k(X;A)$, $H^k(X;A)$ для любой $A$)

## • Эйлерова характеристика

Опр. $\chi(X) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k b_k$, $b_k = \dim H_k(X, \mathbb{F})$

Утв (Задача)

- $\chi(X)$ — гомотопический инвариант
- $\chi(X)$ не зависит от выбора поля коэффициентов, использованного для определения чисел Бетти
- Если $X$ — конечное клеточное пр-во, то
  $\chi(X) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k m_k$, где $m_k$ — количество $k$-мерных клеток

$m_k = \mathrm{rk}\, C_k$

Для многогранника $\chi(M) = \underset{\substack{\parallel\\ m_0}}{В} - \underset{\substack{\parallel\\ m_1}}{Р} + \underset{\substack{\parallel\\ m_2}}{Г}$

Примеры
$\chi(S^2) = 2$
$\chi(S_g) = 2 - 2g$
$\chi(\cdot) = 1 \implies \chi(\mathbb{R}^n) \neq (-1)^n$
$\chi(S^1) = 0$
$\chi(S^n) = \begin{cases} 2 & n \text{ чётно} \\ 0 & n \text{ нечетно} \end{cases}$

$\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$
$\chi(\mathbb{R}P^n) = \frac{1}{2}\chi(S^n) = \begin{cases} 1 & n \text{ чётно} \\ 0 & n \text{ нечетно} \end{cases}$

**Свойство аддитивности** (для клеточных пространств)
$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$

## Секретное знание (без доказательства)

Пусть $X$ — не обязательно компактное пр-во, разбитое на конечное число клеток полуалгебраический образом

$$\chi^{алг}(X) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k m_k, \quad m_k \text{ — число } k\text{-мерных клеток}$$

$$\chi^{алг}(\mathbb{R}^n) = (-1)^n$$

- не является гомотопическим инвариантом, но является комбинаторным
- $\chi^{алг}(X \setminus A) = \chi^{алг}(X) - \chi^{алг}(A)$ $\quad \Big( = \chi(X) - \chi(A)$, $A \subset X$ клеточн. комп. $\Big)$
- Если $X$ компактно, то $\chi^{алг}(X) = \chi(X)$
- Если $X$ — гладкое $n$-мерное многообразие, то $\chi^{алг}(X) = (-1)^n \chi(X)$

**Следствие**: $M$ — компактное нечётномерное многообразие $\Rightarrow \chi(M) = 0$

**Пример** $X = S^2 \setminus \{n \text{ точек}\}$

$$\chi(X) = \chi^{алг}(X) = \chi(S^2) - n\,\chi(\cdot) = 2-n$$

С другой стороны,

$$X \sim \bigvee_{n-1} S^1 \Rightarrow \chi(X) = 1 - (n-1) = 2-n$$

$$S_g \setminus \{n \text{ точек}\} \sim \bigvee_{n-1+2g} S^1 \qquad \chi(\ldots) = \chi(\ldots) = 2-2g-n$$