Решения коалиционных игр

Козлов Василий

7 декабря 2020 г.

Игра "Оркестр"

s - певец,p - пианист,d - ударник

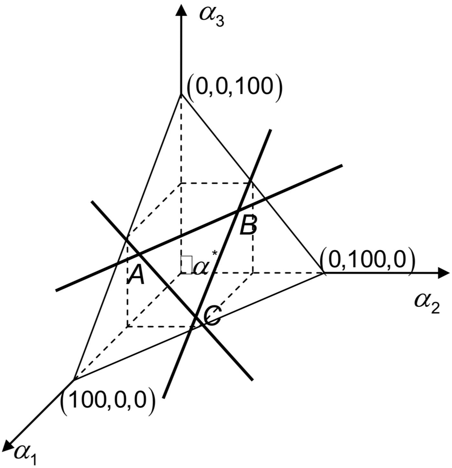
$$N = \{s,p,d\}, v(s) = 20, v(p) = 30, v(d) = 0$$
$$v(s,p) = 80, v(s,d) = 50, v(p,d) = 65, v(s,p,d) = 100$$

(здесь и далее v - это характеристическая функция игры)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 80, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 65, \alpha_1 + \alpha_3 \geq 50 \\ \alpha_1 \geq 20, \alpha_2 \geq 30, \alpha_3 \geq 0 \end{cases}$$

множество, задающееся этой системой, называется ядром

Игра "Оркестр"



Определение ядра

Определение Множество всех допустимых недоминируемых распределений коалиционной игры V называется **ядром** и обозначается $C(V)$
Иначе говоря, должны выполняться условия:
N- тотальная коалиция, $K \subset \mathrm{N}$:

1) $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$

2) $\sum_{i \in K} \alpha_i \geq v(K)$

Основные свойства ядра

- $C(N)$ - это замкнутое, ограниченное подмножество $V(N)$
- Если также рассматриваются коррелированные стратегии, то $C(N)$ - это выпуклый многогранник

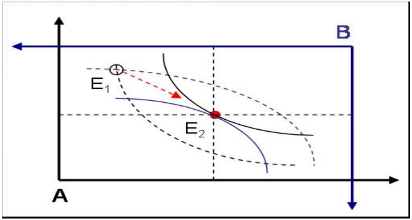
- Элементы из ядра оптимальны по Парето, и индивидуально рацональны. Поэтому они могут претендовать на звание хорошего решения

Ядро может быть пустым

Пример Пусть трое делят пирог и любая пара может обеспечить себе его целиком. Тут ядро пусто, а значит они вряд ли смогут договориться

Ядро экономики

Пусть у участников $i \in N$ имеются начальные запасы $\omega_i \in \mathbb{R}^n_+$. Спрашивается как "правильно"распределить их? То есть нужно найти такие $x_i \in \mathbb{R}^n_+, i \in N : \sum_i x_i = \sum_i \omega_i$, чтобы $u_i(x_i) \geq u_i(\omega'_{i,K})\ \forall K \subset N$. Множество, состоящее из таких x_i и есть **ядро экономики**. Это понятие первоначально появилось у Эжворта, в 1881 г. в частном случае:



Решение Неймана-Моргенштерна

Определение Назовем **дележом** коллективно и индивидуально рациональный вектор $x \in V(N)$.
$E(V)$-множество всех дележей игры V
Определение Н-М решением игры V называется $Z \subset E(V)$ т.ч:
1) $y \in E(V)\backslash \mathrm{Z} \Rightarrow \exists \mathrm{x} \in Z$ такой что x доминирует y
2) $x, y \in Z \Rightarrow$ x не доминирует y

Решение Неймана-Моргенштерна

Пример В игре "Дележ 300 $ " между тремя игроками не было решения в смысле ядра, зато оно появилось в смысле Н-М решения: (150,150,0),(150,0,150),(0,150,150). Действительно, ни какой из этих дележей друг друга не доминирует. При этом произвольный дележ (a,b,c) доминируется одним из них.
Замечание В 1967г. был построен пример игры на 10 лиц без Н-М решения.

Нуклеолус или N-ядро

Определение Эксцессом коалиции S при данном платежном векторе x называется:

$$e(S,x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Дележ x принадлежит ядру тогда и только тогда, когда все эксцессы ≤ 0, лежит в ϵ-ядре когда все эксцессы $\leq \epsilon$. Сдвигая таким образом и дальше стенки многогранника, мы получим единственную точку (лексикографически минимальную), которая называется Нуклеолусом или N-ядром

Переговорное множество

Определение Переговорной точкой игры называется такой дележ α, что $\forall i,j$, если для i существует коалиция $S : i \in S, j \notin S$ с дележом β, лучшим по сравнению с α для всех членов S, то для j существует коалиция $T : j \in T, i \notin T$ с доступным ей дележом γ, который слабо лучше, чем β для $S \bigcap T$ и слабо лучше α для $T \backslash S$

Вектор Шепли

Вектор $(\varphi_i(v))$ называется вектором Шепли, если:

$$\varphi_i(v) = \sum_{\{s|i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(v(S) - v(S \backslash \{i\}))$$

то есть мы смотрим на всевозможные порядки присоединения игроков к тотальной коалиции, смотрим что привнес каждый и усредняем по всем таким порядкам

Вектор Шепли

Пример Найдем вектор Шепли в игре "Оркестр":

	S	P	D
SPD	20	60	20
PSD	50	30	20
DSP	50	50	0
DPS	35	65	0
SDP	20	50	30
PDS	35	30	35
$\varphi_i(v)$	35	47,5	17,5