Математическая теория игр и справедливое распределение.
Лекция 22. Ядра коалиционных игр.

Федоров Михаил

Математический факультет ВШЭ

Обозначения

N — множесто игроков. Для любой коалиции $K \subset N$ обозначим $x(K) = \sum_{i \in K} x_i$.
$V = (V(K), K \subset N)$ — коалиционная игра. $v(K)$ — "ценность"коалиции. Для простоты будем считать, что $v(i) = 0$ для любого игрока i, $v(\emptyset) = 0$, v монотонна и супераддитивна.
$C(V)$ — ядро коалиционной игры, состоит из допустимых недоминируемых распределений. В трансферабельном случае ядро состоит из веторов x, для которых $x(N) = v(N)$ и для любой коалиции $K \subset N$ выполнено $x(K) \geqslant v(K)$.

Супермодулярные (выпуклые) игры

Опр. Функция v называется супермодулярной (выпуклой), если для любых двух коалиций K, K' выполнено

$$v(K) + v(K') \leqslant v(K \cap K') + v(K \cup K').$$

Теорема (Шепли). *Если игра v выпукла, то ядро $C(v)$ не пусто.*

Укажем явно элемент ядра для выпуклой игры. Упорядочим игроков: $N = \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через $K_i = \{1, \ldots, i\}$ коалицию состоящую из первых i игроков. Назначим выплаты по формуле

$$x_i = v(K_i) - v(K_{i-1}).$$

Для перестановки игроков π обозначим построенный так вектор платежей через x_π.

Чтобы доказать, что построенный вектор x_π лежит в ядре достаточно проверить, что $x(K) \geqslant v(K)$ для любой коалиции K. Это несложно сделать по индукции по числу игроков в коалиции.

Утверждение. Для выпуклой игры v ее ядро $C(v)$ является выпуклой оболочкой точек x_π. Причем точки $x_p i$ являются вершинами многогранника $C(v)$.

Примеры выпуклых игр

Пример 1 *(единогласие)*. Пусть $v(S) = 0$ для $S \neq N$ и $v(N) = 1$.
Более обще для $S \subset N$ можно построить

$$v_S(K) = \begin{cases} 1, \text{если } S \subset K, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 2 *(Заговор)*. Для $S \subset N$

$$v_S(K) = \begin{cases} 0, \text{если } K \subset S, \\ -1, \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 3 *(емкости)*. Пусть игрок i хочет получить какое-то общественное благо в размере y_i, производство которого стоит $c(y)$. Тогда

$$v(K) = -c(\max_{i \in K}(y_i)).$$

Если функция c монотонна, то игра выпукла.

Стабильные системы коалиций

Представим, что образование некоторых коалиций запрещено.

Пусть $\mathcal{F} \subset 2^N$ — семейство допустимых коалиций, причем $\{i\} \in \mathcal{F}$ (каждый игрок может играть "в одиночку") и $N \in \mathcal{F}$. Назовем *$\mathcal{F}$–игрой* отображение $v\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

Ядром $\mathcal{F}$–игры назовем множество дележей x, для которых $x(N) = v(N)$ и $x(S) \geqslant v(S)$ для всех допустимых S.

$\mathcal{F}$–игра называется *супераддитивной*, если для любого разбиения допустимой коалиции $S = \coprod S_i$ на допустимые коалиции верно $v(S) \geqslant \sum v(S_i)$.

Семейство $\mathcal{F}$ **стабильно**, если для любой супераддитивной $\mathcal{F}$–игры ее ядро $C(v)$ непусто.

Примеры стабильных систем

Пример 1 Марьяж (см. Лекцию 20).

Пример 2 Пусть участники игры — вершины дерева T. И множество допустимых коалиций — это все поддеревья T.

Упр. Проверить, что эти системы стабильны.

Сбалансированные игры

Не только выпуклые игры имеют непустое ядро. Можно явно написать необходимое условие непустоты ядра.
В пространстве $\mathbb{R}^N$ рассмотрим многогранник, заданные неравенствами $x(K) \geqslant v(K)$. На нем достичется минимум Min линейного функционала $x(N) = \sum x_i$. Ясно, что $Min \geqslant v(N)$. И ядро игры непусто тогда и только тогда, когда $Min = v(N)$.
Из теоремы двойственности следует, что можно выразить $x(N) = \sum_K \lambda_K x(K)$, где $\lambda_K \geqslant 0$. И тогда

$$Min = \max_{\lambda} \sum_K \lambda_K v(K)$$

.
Набор чисел $\lambda = \{\lambda_K, K \subset N\}$ назвается *сбалансированным семейством*, если $\lambda_K \geqslant 0$ и $\sum_{ß \in K} \lambda_K = 1$ для всякого i.

Сбалансированные игры

Игра называется *сбалансированной*, если для любого сбалансированного семейства λ выполнено $\sum_K \lambda_K v(K) \leqslant v(N)$.

Тем самым мы верна следующая теорема

Теорема *(Бондарева, 1963)*. Игра v имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда она сбалансирована.

Ядра игр без трансферабельности

Для коалиции K подмножество $V(K) \subset \mathbb{R}^K$ — те платежи, которые коалиция может достичь. Сформулируем аналог условия сбалансированности.
Представим, что "результатом коалиционного взаимодействия"будет набор пар (x, λ), где x — дележ, а $\lambda = (\lambda_K, K \subset N)$ — уровни интенсивности формирования каждой коалиции. И выполнены следующие условия:
I. Набор λ сбалансирован.

Обозначим через $V(\lambda)$ множество векторов y таких, что $y_K \in V(K)$ для любой коалиции K для которой $\lambda(K) > 0$.
II. $x \in V(\lambda)$.

III. Для любой коалиции K точка x_K не принадлежит внутренности $V(K)$.

Ядра игр без трансферабельности

Набор пар (x, λ) назовем B–ядерным, если он удовлетворяет условиям I-III.
Теорема. Для любой игры существуют B–ядерные исходы.

Игра V *сбалансирована*, если $V(\lambda) \subset V(N)$ для любого сбалансированного набора λ.
Теорема *(следствие предыдущей)*. Если игра сбалансирована, то ее ядро непусто.

Спасибо за внимание!