Семинар 17

8 декабря 2020г.

Линейные системы с постоянными коэффициентами.

$$\dot{X} = AX + F(t) \qquad A \in Mat_n(\mathbb{R})$$

Фундаментальную систему решений однородной системы образуют столбцы матрицы $\exp(tA)$. Это базис в n-мерном линейном пространстве решений однородной системы.

<u>Удобство</u> этого базиса: $e^{tA}\Big|_{t=0} = \mathbb{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ столбец $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

имеет в качестве c_i <u>начальные значения</u> искомых функций в $t=0$: $\underline{c_i = x_i(0)}$.

Удобно решать задачу Коши в $t=0$ и есть явный вид потока вект. поля.

<u>Неудобство</u> этого базиса: необходимо вычислять $\exp(tA) = T\exp(tD)T^{-1}$. Здесь D - норм. Жорданова форма A, T - матрица, построенная из собств. векторов и присоединенных векторов.

Можно обойтись без вычислений e^{tA}: собств. вектора и присоединенные вектора позволяют тоже строить ФСР.

Очевидное утверждение:

[У] Если u – собств. вектор матрицы A с с. значением λ: $Au = \lambda u$, то $X(t) = e^{\lambda t} u$ – решение однородной системы $\dot{X} = AX$.

Поэтому если матрица A имеет n попарно различных с. значений $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, то ФСР однородной системы образуют n столбцов

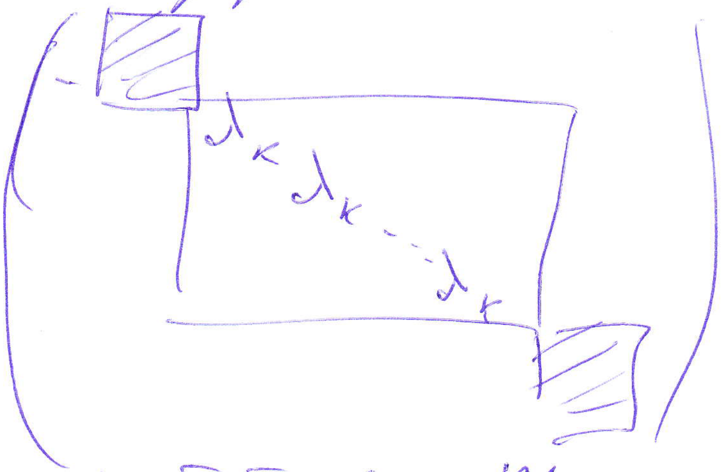
$$\left\{ X_{(k)}(t) = e^{\lambda_k t} u_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

Вронскиан этой системы векторов:

$$W[X_{(1)} \ldots X_{(n)}] = e^{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k t} \det \| u_1, \ldots, u_n \| \neq 0$$

поскольку постоянные столбцы u_k линейно-независимы как собств. вектора линейного оператора, отвечающие разным с. значениям.

Если есть <u>кратные</u> собств. значения, то возможны 2 ситуации: λ_k имеет кратность $m_k > 1$, но этому λ_k отвечает <u>диагональный</u> блок $m_k \times m_k$ в матрице A (т.е. нет нетрив. жордановых клеток):

A ~ 

Тогда обязательно найдется m_k линейно-независимых собств. вектора $u_{(k,1)} \dots u_{(k,m_k)}$ и в ФСР войдут функции:

$$e^{\lambda_s t} u_{(k,i)} \quad 1 \le i \le m_k$$

Если же есть жордановы клетки, то собств. векторов будет <u>меньше</u>, чем m_k, и надо строить недостающие решения.

Зам. Как узнать, есть жордан. клетки, или нет?

Пусть хар. полином A: $\chi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^m Q(\lambda)$, $Q(\lambda_0)\neq 0$

имеет корень λ_0 кратности m.

Нужно найти $\operatorname{rank}(A-\lambda_0 E)$.

Если $\operatorname{rank}(A-\lambda_0 E) = n-m$, то жорд. клеток <u>нет</u>, если $\operatorname{rank}(A-\lambda_0 E) > n-m$, то есть нетривиальные жорд. клетки.

Например, $A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$, $\chi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^4$

$$\operatorname{rank}(A-\lambda_0 E)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2>4-4=0$$

$\Rightarrow$ есть жорд. клетки.

Попутно мы различаем ситуации:

$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$ и $\tilde{\tilde{A}}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$

$\operatorname{rank}(\tilde{A}-\lambda_0 E)=1$

$\operatorname{rank}(\tilde{\tilde{A}}-\lambda_0 E)=3.$

Найдём ФСР жордановой клетки: $\dot{X} = J_n X$.

Рассмотрим для краткости $n=4$:

$$J_4 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$e^{J_4 t} = e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & t^2/2! \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{с. в. } J_4: \quad J_4 u_1 = \lambda_0 u_1$$

Присоединённые вектора:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

$$(J_4 - \lambda_0) u_i = u_{i-1} \qquad 2 \le i \le 4.$$

Если посмотреть на столбцы e^{tJ_4},

то сразу получим ФСР однородной системы с J_1:

$$h_1(t) = e^{\lambda_0 t} u_1$$

$$h_2(t) = e^{\lambda_0 t}(t u_1 + u_2)$$

$$h_3(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^2}{2!} u_1 + t u_2 + u_3\right)$$

$$h_4(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^3}{3!} u_1 + \frac{t^2}{2!} u_2 + t u_3 + u_4\right)$$

=) то ↑ легко запомнить: выражение в <u>скобках</u> при $h_k(t)$ получается интегрированием по t соотв. выражения при $h_{k-1}(t)$, только в качестве "произвольной константы интегрирования" надо добавить присоединённый вектор u_k.

Нетрудно понять, что для матрицы $A = TJT^{-1}$ структура $h_k(t)$ будет такая же, только вектора u_k будут иметь не такой простой вид, как для y.

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = -x \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = (\lambda+1)^2 \quad \lambda = -1$ корень кратности 2.

$$A - (-1)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A - \lambda_0 \mathbb{1}) = 1 -$$

– есть Жорданова клетка.

$A u_1 = (-1) u_1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собств. вектор.

$(A + \mathbb{1}) u_2 = u_1 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ – присоед. вектор. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow h_1(t) &= e^{-t} u_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ h_2(t) &= e^{-t}(t u_1 + u_2) = e^{-t}\begin{pmatrix} t+1 \\ t+2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ФСР системы}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} c_1 + c_2(1+t) \\ c_1 + c_2(2+t) \end{pmatrix}.$$

– общее решение.

Здесь C_1 и C_2 линейно выражаются через нач. данные:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x(0) \\ C_1 + 2C_2 = y(0) \end{cases}$$

<u>Пример 2</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 4z \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = 2x + 2y - 3z \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1)(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = -1$ – однократный корень в $\chi_A(\lambda) = 0$.

$\lambda_2 = 1$ – <u>двукратный</u> корень.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A - \lambda_2 E) = 1 = \underset{n}{3} - \underset{\text{кратность } \lambda_2}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>Нет</u> жордановой клетки.

Ищем 2 независимых с.в.:

$$Au = \lambda_2 u: \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha + 2\beta - 4\gamma = 0$$

$$\alpha = 2\gamma - \beta \qquad u = \begin{pmatrix} 2\gamma - \beta \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} -$$

– двумерное простр-во решений.

$$u_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_{(2,2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ – 2 лин. независ. с.в.

$$Au_1 = -u_1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 u_1 e^{-t} + C_2 u_{(2,1)} e^{t} + C_3 u_{(2,2)} e^{t} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + e^{t}(2C_2 - C_3) \\ C_3 e^{t} \\ C_1 e^{-t} + e^{t} C_2 \end{pmatrix}$$

Решение неоднородной системы.

$$\dot{X} = AX + F \qquad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Для любого столбца $F(t)$ система решается методом вариации произв. констант. Здесь удобна ФСР в виде $\exp(tA)$:

$$\underbrace{\tilde{X}(t) = \exp(tA)\,C}_{\text{Общее решение однородной системы}} \longrightarrow X(t) = \exp(tA)\,\underline{\underline{C(t)}},$$

где $C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix}$ – неизв. функции, которые надо подобрать.

Подставляем в систему этот анзац:

$$\dot{X} = \underline{Ae^{tA}C(t)} + e^{tA}\dot{C}(t) = \underline{Ae^{tA}C(t)} + F$$

$$e^{tA}\dot{C}(t) = F$$

$$\dot{C}(t) = e^{-tA}F(t) \Rightarrow \text{все } C_i(t)$$

находятся однократным рел:

$$X(t) = e^{tA}\int_0^t e^{-\tau A} F(\tau)d\tau + e^{tA}\vec{C}$$

столбец произв. конст.

общее решение неоднородной системы.

Мы рассмотрим важный частный случай, когда $F(t)$ — квазимногочлен.

Тогда для поиска частного решения можно обойтись алгебраическими методами и не нужно вычислять e^{tA}.

$F(t)$ квазимногочлен, то есть:

$$F(t) = e^{\mu t}\begin{pmatrix} P_{m_1}(t) \\ \vdots \\ P_{m_n}(t) \end{pmatrix}$$

Здесь $P_{m_i}(t)$ — полиномы от t порядка $m_i \geq 0$ ($m_i = 0 \Rightarrow P_{m_i} = const$)

Таких квазимногочленов может быть несколько (с разными показателями μ):

$$F = e^{\mu_1 t}\begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} + e^{\mu_2 t}\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} + \dots$$

Каждый квазимногочлен разбивается в сумму простейших квазимногочленов вида:

$$\varphi(t) = e^{\mu t} t^k \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

постоянный столбец коэффициентов при t^k в каждом $P_{m_i}(t)$.

Например:

$$e^{\mu t}\begin{pmatrix} t^2 + t \\ 2 \\ t^3 + 2t - 1 \end{pmatrix} = e^{\mu t}\left(t^3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Итак, рассмотрим поиск частного решения для простейшей правой части вида $\Phi(t)$.

Ⓐ μ <u>не</u> корень хар. полинома $\chi_A(\lambda)$ (т.е. μ <u>не</u> собств. значение A).

Частное решение ищем в виде:

$$X_{ч}(t) = e^{\mu t}\begin{pmatrix} \alpha_0 t^k + \alpha_1 t^{k-1} + \ldots + \alpha_k \\ \beta_0 t^k + \beta_1 t^{k-1} + \ldots + \beta_k \\ \ldots \\ \gamma_0 t^k + \gamma_1 t^{k-1} + \ldots + \gamma_k \end{pmatrix}$$

То есть <u>каждая</u> из n компонент $X_{ч}(t)$ ищется в виде $e^{\mu t} Q_k(t)$ — в виде полинома k-го порядка с неизвестн. коэффициентами.

То есть всего n штук полиномов k-го порядка $\Rightarrow$ $n(k+1)$ неизвестн. констант (в n раз больше, чем было в анзаце для уравнения n-го порядка).

Потом это $X_{ч}(t)$ надо подставить в систему и приравнивать коэфф. справа и слева при одинаковых квазимономах $e^{\mu t} t^s$.

Заметим, что поиск $X_{ч}(t)$ <u>не требует</u> даже знания собств. значений A (и, тем более, вычисление e^{tA}). Надо только убедиться, что

$$\chi_A(\mu) \neq 0.$$

(Б) <u>Если μ корень $\chi_A(\lambda)$ с кратностью m:</u> $\chi_A(\lambda) = (\lambda-\mu)^m R_{n-m}(\lambda)$.

Тогда анзац усложняется:

$$X_ч(t) = e^{\mu t} \begin{pmatrix} P_{(k+m)}(t) \\ Q_{(k+m)}(t) \\ \vdots \\ S_{(k+m)}(t) \end{pmatrix} -$$

- <u>каждая</u> компонента $X_ч$ - квазимономом степени <u>$k+m$</u> <u>общего</u> вида

То есть, в отличие от уравнения n-го порядка, когда $Q_k(t)$ просто умножается на t^m, здесь увеличивается число неизвестных параметров.

Пример 3

$$\dot{x} = -x + 2y + 2z$$
$$\dot{y} = -3x + 4y + 3z$$
$$\dot{z} = 2z + 4t$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Найти ФСР однор. системы и общее решение неоднородной.

а) Спектр A:

$$\det(\lambda E - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ 3 & \lambda-4 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 3 & \lambda-4 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1).$$

Есть кратный корень $\underline{\lambda = 2}$.

Отвечает ли ему Жорданова клетка?

$$A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A - 2\mathbb{1}) = 2 > 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ – есть 2×2 жорданова клетка

б) Собств. вектора A:

$$A u_1 = u_1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1(t) = e^t u_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ – первый вектор из ФСР.

$$A v_2 = 2 v_2 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ – второй вектор ФСР.

Ищем присоединенный вектор:

$$(A - 2\mathbb{1}) v_3 = v_2 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_3(t) = e^{2t}(t v_2 + v_3) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ 1 \end{pmatrix}$$ – третий вектор ФСР.

в) Частное решение неоднор. системы.

$$F = t\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \text{ — 1я степень}$$

Показатель $\mu = 0$ — не собств. значение

$$\Rightarrow \quad X_r(t) = \begin{pmatrix}\alpha_0 t + \alpha_1\\ \beta_0 t + \beta_1\\ \gamma_0 t + \gamma_1\end{pmatrix} \qquad \dot{X}_r = \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\\ \gamma_0\end{pmatrix}$$

$$AX_r + F = \begin{pmatrix} t(-\alpha_0 + 2\beta_0 + 2\gamma_0) - \alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \\ t(-3\alpha_0 + 4\beta_0 + 3\gamma_0) - 3\alpha_1 + 4\beta_1 + 3\gamma_1 \\ t(2\gamma_0 + 4) + 2\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\\ \gamma_0\end{pmatrix}$$

вклад от F

Коэфф. при t должны $= 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \gamma_0 = -2 \qquad \alpha_0 = 2 \qquad \beta_0 = 3$$

Коэфф. при t^0:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 &= \alpha_0 = 2 \\ -3\alpha_1 + 4\beta_1 + 3\gamma_1 &= \beta_0 = 3 \\ 2\gamma_1 &= \gamma_0 = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \beta_1 = 3 \\ \gamma_1 = -1 \end{cases}$$

Итог: $X_r(t) = \begin{pmatrix} 2t+2 \\ 3t+3 \\ -2t-1 \end{pmatrix}$

Общее решение:

$X(t) = X_r(t) + C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t) + C_3 h_3(t)$,

где C_i – $\forall$ веществ. константы