Семинар 16

8 декабря 2020г.

Неоднородное ДУ, отвечающее однородному ДУ с постоянными коэффициентами.

ФСР однородного ДУ находится всегда ⇒ метод вариации произв. постоянных позволяет найти общее решение неоднородного ДУ при $\forall$ правой части $F(x)$.

Мы рассмотрим важный частный случай, когда $F(x)$ – квазимногочлен. В этом случае частное решение можно найти алгебраическими методами, не решая систему ДУ первого порядка на $C_i'(x)$. При этом нам не потребуется знание ФСР (для метода вариации произв. постоянных явный вид ФСР – обязательное условие).

Итак, рассматриваем уравнение:

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\ldots+p_n y = e^{\mu x} P_m(x)$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Квазимногочленом будет и правая часть вида $e^{qx}\cos\omega x\, P_m(x)$ или $e^{qx}\sin\omega x\, Q_n(x)$ – отвечает комплексному $\mu = q+i\omega$

$\boxed{\text{Зам}}$ Если правая часть сумма нескольких квазимногочленов:

$$e^{\mu_1 x} P_{m_1}(x) + e^{\mu_2 x} P_{m_2}(x) + \ldots \quad (\star)$$

То последовательно находим частные решения, отвечающие каждому квазимногочлену, а потом берём их сумму – получим частное решение для правой части вида $(\star)$.

Опять возможны несколько случаев.

(A) $f(x) = e^{\mu x} P_m(x)$ и

μ — веществ. число, не являющееся корнем хар. полинома: $L_n(\mu) \neq 0$.

Вспоминая правила дифференцирования квазимногочлена, понимаем, что частное решение надо искать в виде $y(x) = e^{\mu x} Q_m(x)$

где $Q_m(x)$ — произвольный полином того же порядка m, что и P_m в правой части:

$$Q_m = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_m$$

Здесь $m+1$ неизв. коэффициент.

Подставив этот ансатц в неоднородное ДУ, получим $m+1$ линейное алгебраическое уравнение на $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$: надо просто приравнять коэфф. справа и слева при одинаковых $\underline{x^k} e^{\mu x}$.

Подчеркнём, что ФСР здесь не требуется. ФСР нужно для построения **общего** решения.

(б) если μ — **корень** хар. полинома кратности $s \geq 1$. Анзац немного усложняется: $Q_m(x)$ надо **домножить** на x^s. Число произв. коэфф. останется **прежним**:

$$y_{\text{частн.}}(x) = e^{\mu x} x^s Q_m(x).$$

Пример 1

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$

Число $\mu = 3$ **не явл. корнем** хар. полинома $\lambda^2 - 3\lambda + 2$.

Степень квазимногочлена нулевая:

$$e^{3x} = \underset{P(x)}{1} \cdot e^{3x}$$

Поэтому $y_r = \alpha \cdot e^{3x}$

$\forall$ полином нулевой степени:

$\underline{Q(x) = \alpha}$.

$y_r' = 3\alpha e^{3x}$; $y_r'' = 9\alpha e^{3x}$

Подставим в ДУ.

$\Rightarrow e^{3x}(9\alpha - 9\alpha + 2\alpha) = e^{3x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 1/2 \Rightarrow y = \dfrac{e^{3x}}{2}$ - частное решение.

Пример 2 Изменим правую часть.

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

Теперь $\mu = 2$ - корень хар. полинома кратности 1 $\Rightarrow$

$$y_r = e^{2x} x \cdot Q(x) = \alpha x e^{2x}$$

$$y_r' = \alpha e^{2x}(1 + 2x)$$

$$y_r'' = \alpha e^{2x}(4 + 4x)$$

Подставляем в ДУ:

$$\alpha e^{2x}(4 + 4x - 3(1 + 2x) + 2x) = e^{2x}$$

$$\alpha e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\boxed{y_r(x) = xe^{2x}}$$

Пример 3

$$y''' + y'' + y' = x^2$$

Здесь $\mu = 0$: $x^2 = x^2 e^{0\cdot x}$

Характ. полином: $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$

$\Rightarrow$ 0 – корень, кратности 1.

Степень квазимногочлена в правой части вторая $\Rightarrow Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

И, учитывая $\mu = 0$ – корень кратн. 1, анзац для частного решения:

$$\left.\begin{aligned} y_r(x) &= x\cdot(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ y_r' &= 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \\ y_r'' &= 6\alpha x + 2\beta \\ y_r''' &= 6\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$6\alpha + 6\alpha x + 2\beta + 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = x^2$$

$\alpha = 1/3$

$6\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = -3\alpha = -1$

$6\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{y_r(x) = \frac{x^3}{3} - x^2}$$

(B) Если правая часть имеет вид:

$$e^{qx}\cos\omega x\, P_m(x) + e^{qx}\sin\omega x\, \tilde{P}_k(x),$$

полиномы P_m и $\tilde{P}_k$ – разные и разных степеней (например, один из них может вообще $=0$).

(B1) Если комплексное число $\mu = q + i\omega$ не корень хар. полинома.

Берём $N = \max(\deg P_m, \deg \tilde{P}_k) = \max(m, k)$

и строим анзац:

$$y_r = e^{qx}(Q_n(x)\cos\omega x + \tilde{Q}_n \sin\omega x)$$

$$Q_n(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n$$

$$\tilde{Q}_n(x) = \beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots + \beta_n$$

Всего $2n$ неизв. параметров. $\{\alpha_i\} \cup \{\beta_i\}$.

Подчеркнём, что даже если квазимногочлен справа содержит только $\cos\omega x$ или только $\sin\omega x$, в анзац надо включать <u>обе</u> эти ф-ции.

(B2) Самый технически громоздкий случай: $\mu = q + i\omega$ – корень кратности s. Тогда всё в (B1) умножаем на x^s:

$$y_c(x) = e^{qx} x^s \left(Q_n(x)\cos\omega x + \tilde{Q}_n \sin\omega x\right)$$

<u>Пример 4</u>.

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x$$

Правая часть отвечает $P = 1$ и

$$\mu = q + i\omega = i \quad (q = 0 \quad \omega = 1)$$

Хар. полином: $\lambda^2 - 2\lambda + 2$, число i – <u>не корень</u>.

~~Св~~ Максим. степень n равна 0 =>

$$y_r = e^{qx}(Q_n \cos \omega x + \tilde{Q}_n \sin \omega x) =$$

$$= \alpha \cos x + \beta \sin x$$

$$y_r' = -\alpha \sin x + \beta \cos x$$

$$y_r'' = -\alpha \cos x - \beta \sin x$$

$$y'' - 2y' + 2y = -\alpha \cos x - \beta \sin x + 2\alpha \sin x -$$

$$- 2\beta \cos x + 2\alpha \cos x + 2\beta \sin x =$$

$$= (\alpha - 2\beta)\cos x + (2\alpha + \beta)\sin x = \sin x$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{5} \\ \alpha = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$y_r = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

В частном решении есть и $\sin x$ и $\cos x$, хотя в правой части неоднородного ДУ был только синус.

5-минутка

$$y'' + 2y' + y = 2\operatorname{sh} x$$

а) ФСР однородного ДУ (0,2б)

б) Частное решение неоднородного (0,6б)

в) Найти решение с начальными данными $y(0) = y'(0) = \frac{1}{2}$. (0,2б)

Решение:

а) $y = e^{\lambda x} \to \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0 \quad \lambda = -1$ –

– кратный корень

$\boxed{y_1 = e^{-x} \quad y_2 = xe^{-x}}$ – ФСР одн. ДУ.

б) $y'' + 2y' + y = e^{x} - e^{-x}$

$e^{x} \to \mu = 1$ – не корень хар пол.

$e^{-x} \to \mu = -1$, корень кратности $s = 2$.

Анзац для частного решения:

$y_r = \alpha e^{x} + \beta x^2 e^{-x}$

$y_r' = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}(2x - x^2)$

$y_r'' = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

$\rightarrow$ Подставляем в неоднородное ДУ:

$\underline{\alpha e^{x}} + \underline{\beta e^{-x}}\cancel{(x^2 - 4x + 2)} + \underline{2\alpha e^{x}} + \underline{2\beta e^{-x}}\cancel{(2x - x^2)} +$

$+ \underline{\alpha e^{x}} + \underline{\beta \cancel{x^2 e^{-x}}} = \underline{e^{x}} - e^{-x}$

$4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$ $\qquad 2\beta = -1 \quad \beta = -\frac{1}{2}$

Частное решение: $\boxed{y_r(x) = \frac{e^{x}}{4} - \frac{x^2}{2} e^{-x}}$

в) Общее решение:

$y = \frac{e^{x}}{4} - \frac{x^2}{2} e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

$y(0) = \frac{1}{4} + C_1 = \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{C_1 = \frac{1}{4}}$

$y'(0) = \frac{1}{4} - C_1 + C_2 = \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{C_2 = \frac{1}{2}}$

Ответ: $\boxed{y(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{4} + \frac{x(1-x)}{2} e^{-x}}$