НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кооперативные игры

Лекция 20

Денисов Кирилл

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

2020 г.

Переход к коалиционной теории

Коалиция — это подмножество игроков $K \subset N$, коалиция N называется *тотальной*

Для набора стратегий $s_N = (s_i, i \in N)$ через s_K обозначается его проекция на $S_K = \times_{i \in K} S_i$

Аналогично понимается s_{-K}

Предположим, что у нас имеется игра $G = (N, (S_i), (u_i))$ в нормальной форме. Если все игроки договорятся использовать стратегический профиль s_N, то выигрыши удобно изображать вектором $u(s_N) = (u_i(s_N)) \in \mathbb{R}^N$

Перебрав все стратегические профили из S_N, мы получим некоторое подмножество в пространстве $\mathbb{R}^N$, которое обозначают как $V(N)$

Переход к коалиционной теории

Множества $V(K)$ можно связать не только с тотальной коалицией, но и с каждой коалицией K

Скажем, что коалиция K *гарантирует* вектор полезности $x \in \mathbb{R}^K$, если существует корелллированная стратегия $\sigma_K \in \Delta(S_K)$, такая, что для любой σ_{-K} выполнены неравенства

$$u_i(\sigma_K, \sigma_{-K}) \geq x_i, \quad \forall i \in K.$$

Обозначим через $V(K)$ множество тех векторов из $\mathbb{R}^K$, которые может гарантировать K

Множества $V(K)$ — выпуклые, нормальные, ограниченные сверху, замкнутые и супераддитивные (если коалиции K и K' не пересекаются, то $V(K \cup K') \supset V(K) \times V(K')$)

Коалиционные игры

Пусть N — множество игроков. *Коалиционной игрой* называется задание для каждой коалиции $K \subset N$ непустого множества $V(K) \subset \mathbb{R}^K$

Множество $V(K)$ отмечает множество полезностей, которые коалиция K может гарантировать своим членам. Обычно предполагается, что множества $V(K)$ — замкнутые, нормальные, ограниченные сверху. Часто предполагается супераддитивность. В случае двух участников эти данные фактически совпадают с данными задачи торга

Пусть каждый участник i владеет некоторым начальным запасом $\omega(i)$, принадлежащим пространству товаров $\mathbb{R}_+^l$ и имеет функцию полезности $u_i : \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}$

Коалиция K может перераспределить свои ресурсы, т.е. перейти к набору $x_i \subset \mathbb{R}_+^l$, такому, что $x(K) := \sum_{i \in K} x(i) = \omega(K)$

Здесь $V(K) = \{u_i(x(i)), i \in K, x(K) = \omega(K)\}$

Имеется множество мужчин M и женщин W, которые могут заключать браки (моногамные и гетеросексуальные). Считается, что у каждого участника есть функция полезности $u_i \geq 0$ на множестве потенциальных партнеров. Полезность одиночки для простоты считаем нулевой.

Представим это в форме коалиционной игры. В качечстве N возьмем объединение M и W. Исходом Естественно считать паросочетание некоторых мужчин и женщин, остальные остаются холостыми. Формально, паросочетание — это биекция μ части мужчин $M' \subset M$ и части женщин $W' \subset W$

С кажжым таким паросочетанием(матчингом) μ свяжем вектор свяжем вектор $x_\mu \in \mathbb{R}^N$

Мужские координаты этого вектора равны $u_m(\mu(m))$, если $m \in M'$, и равны 0 в противном случае. Аналогично задаются женские координаты.

Наконец, множество $V(N)$ есть объединение множеств x_μ — $\mathbb{R}^N_+$, когда μ пробегает все матчинги

Аналогично определяется множество $V(K)$ для произвольной коалиции $K \subset N$. Нужно только заменить M и W на $M \cap K$ и $W \cap K$. В результате мы получаем коалиционную игру V.

Трансферабельные полезности

Можно выделить важный частный случай — случай т.н. *трансферабельных полезностей*, или кооперативных игр с *побочными платежами* (в общем случае говорят про игры без побочных платежей).

Предположим, что в системе имеется бесконечно делимый и желательный товар — *деньги*, и что участники могут свободно передавать его друг другу. Более того, предположим, что полезность этого товара линейно входит в функцию полезности (так что добавление единицы денег увеличивает полезность каждого на единицу).

Тогда вместе с каждой точкой x в множество $V(K)$ входит и любая точка y с той же суммой координат.

Трансферабельные полезности

Для краткости используем обозначения: $x(K) = \sum_{i \in K} x_i$. Тогда $x \in V(K)$ и $y \in \mathbb{R}^K$, $x(K) \geq y(K)$ влечет, что $y \in V(K)$. В случае трансферабельных полезностей вместо множеств $V(K)$ задают числа

$$v(K) = max\, x(K), \text{где } x \text{ пробегает } V(K)$$

В свою очередь,

$$V(K) = \{x \in \mathbb{R}^K, x(K) \leq v(K)\}$$

. Таким образом, коалиционная игра с побочными платежами — это семейство v чисел $(v(K), K \subset N)$, параметризованная коалициями K. Говорят также про игру в *характеристической форме*.

Вокруг озера расположены n фабрик, которые используют для своих нужд чистую воду. Стоимость очистки собственной использованной воды равна C. Если m фабрик сбросили в озеро неочищенную воду, то стоимость очистки озерной воды равна mc. Предполагается, что $c < C < nc$.

Представим это в виде игры в характеристической форме. Под $v(K)$ мы будем понимать издержки коалиции, а именно минимальные издержки коалиции K. Пока коалиция мала, ей выгоднее не очищать сброс, и тогда $v(K) = knc$, где $k = |K|$. Однако, как только размер коалиции станет больше, чем C/c, ей выгоднее оцищать свои выбросы, и в этом случае $v(K) = k(C + (n - k)c)$.

Это пример т.н. симметричной (или анонимной) игры, т.к. $v(K)$ зависит только от размера коалиции K.

Распределения

Распредедением будем называть произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^N$, *допустимое распределение* — вектор из $V(N)$

Решение коалиционной игры должно указывать некоторое допустимое распределение, которое получается в результате рациональных действий игроков. При этом ставятся некоторые разумные требования к решению.

Например, естественно требовать, чтобы решение давало каждому игроку не меньше того, чего он может добиться в одиночку (требование *индивидуальной рациональности*).

Аналогичное требование можно можно высказать и по отношению к любой коалиции.

Доминирование

Для двух распределений x и y из $\mathbb{R}^N$ и коалиции K будем писать

$$x >_K y, \text{ если } x_i > y_i \; \forall i \in K$$

Смысл этого в том, что коалиция не согласится на вектор платежей y, если, действуя самостоятельно, она сможет получить лучший для нее набор полезностей x_K

Тут замешаны два разных свойства: чтобы x был лучше для коалиции K, и одновременно, чтобы x был достижим коалицией K

Задача 1

Докажите, что множества $V(K)$ - выпуклые, а также проверьте свойство супераддитивности (если коалиции K и K' не пересекаются, то $V(K \cup K') \supset V(K) \times V(K')$).

Задача 2

Имеются три фирмы. Первая фирма может выпускать товары D_1 в количестве 900 единиц, вторая — товары D_1 в количестве 700 единиц, а третья — товары D_2 в количестве 1000 единиц. Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2. Единица обоих товаров стоит 1 \$. Прогнозируется спрос на 1000 комплектов. Определите выигрыши всех коалиций.