Вектор Шепли

Лекция 23

Мирошниченко Лена

НИУ ВШЭ

2020

Зачем нам это?

У рассмотренных ранее решений (ядра и НМ-решений) коалиционных игр есть неприятный недостаток – их может не быть, и их может быть слишком много. А хотелось бы каждой игре сопоставить единственное значение, её *цену*. Мы будем рассматривать вектор Шепли для игр с побочными платежами.

Вспомним

Итак, рассмотрим игру $v : 2^N \to \mathbb{R}$ с побочными платежами. В случае супермодулярной игры мы можем сопоставить каждому упорядочиванию игроков $\tau : \{1, 2, \ldots, n\} \to N$ делёж x^τ такой, что игрок $\tau(i)$ с номером i получает полезность $v(\tau\{1, 2, \ldots, i\}) - v(\tau\{1, 2, \ldots, i-1\})$, то есть свою полезность.

Вспомним

Итак, рассмотрим игру $v : 2^N \to \mathbb{R}$ с побочными платежами. В случае супермодулярной игры мы можем сопоставить каждому упорядочиванию игроков $\tau : \{1, 2, \dots, n\} \to N$ делёж x^τ такой, что игрок $\tau(i)$ с номером i получает полезность $v(\tau\{1, 2, \dots, i\}) - v(\tau\{1, 2, \dots, i - 1\})$, то есть свою полезность. **Тогда** для выпуклых игр оказывается, что дележи x^τ лежат в ядре и, более того, образуют крайние его точки, а поэтому их центр тяжести $x^* = \sum_\tau \frac{x^\tau}{n!}$ тоже лежит в ядре и, в некотором смысле, является самым справедливым распределением.

Что же это такое и как его понимать

Определение

Вектор или *значение Шепли* игры v – элемент $\Phi(v) \in \mathbb{R}$, задающийся формулой:

$$\Phi(v) = \sum_{\tau} \frac{x^{\tau}}{n!}$$

Что же это такое и как его понимать

Определение

Вектор или *значение Шепли* игры v – элемент $\Phi(v) \in \mathbb{R}$, задающийся формулой:

$$\Phi(v) = \sum_{\tau} \frac{x^{\tau}}{n!}$$

Можно сказать, что эта формула для конкретного игрока отображает матожидание его выигрыша(который определяется как его “вклад” (который может оказаться и отрицательным) при присоединении к коалиции предшественников), если все распределения игроков считать равновероятными.

Что же это такое и как его понимать

Также можно перевормулировать это значение с упором на значение вектора для каждого игрока.

Что же это такое и как его понимать

Также можно переворму лировать это значение с упором на значение вектора для каждого игрока.
Если при входе игрока i в зале собирается коалиция K, то i получает $v(K) - v(K - i)$, такое происходит в $(k-1)!(n-k)!$ нумерациях (где $k = |K|$), поэтому формула для игрока i:

$$\Phi(v)_i = \sum_{\tau} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}(v(K) - v(K-i))$$

Свойства вектора Шепли

Рассмотрим исходную игру как функцию множеств, приписывающую каждому подмножеству $K \subset U$ число. Тогда заметим следующее:

Свойства вектора Шепли

Рассмотрим исходную игру как функцию множеств, приписывающую каждому подмножеству $K \subset U$ число. Тогда заметим следующее:

- Вектор Шепли преобразует эти функции множеств в *аддитивные* (т.е. задаёт правило, сопоставляющее каждой функции множеств аддитивную)

Свойства вектора Шепли

Рассмотрим исходную игру как функцию множеств, приписывающую каждому подмножеству $K \subset U$ число. Тогда заметим следующее:

- Вектор Шепли преобразует эти функции множеств в *аддитивные* (т.е. задаёт правило, сопоставляющее каждой функции множеств аддитивную)
- *Эффективность* правила: сумма всех координат $\Phi(N)$ равна $v(N)$

Свойства вектора Шепли

Рассмотрим исходную игру как функцию множеств, приписывающую каждому подмножеству $K \subset U$ число. Тогда заметим следующее:

- Вектор Шепли преобразует эти функции множеств в *аддитивные* (т.е. задаёт правило, сопоставляющее каждой функции множеств аддитивную)
- *Эффективность* правила: сумма всех координат $\Phi(N)$ равна $v(N)$
  - Но придётся отметить, что в общем случае вектор Шепли не лежит в ядре (есть ядро или нет), и не является индивидуально рациональным (если, конечно, игра не супераддитивна)

Свойства вектора Шепли

Рассмотрим исходную игру как функцию множеств, приписывающую каждому подмножеству $K \subset U$ число. Тогда заметим следующее:

- Вектор Шепли преобразует эти функции множеств в *аддитивные* (т.е. задаёт правило, сопоставляющее каждой функции множеств аддитивную)
- *Эффективность* правила: сумма всех координат $\Phi(N)$ равна $v(N)$
    - Но придётся отметить, что в общем случае вектор Шепли не лежит в ядре (есть ядро или нет), и не является индивидуально рациональным (если, конечно, игра не супераддитивна)
- *Симметричность* или *анонимность* правила: значение вектора Шепли для игрока не зависит от имени игрока, то есть с каждой перестановкой игроков π можно связать новую игру πv по формуле $\pi v(K) = v(\pi(K))$, и тогда вектор $\Phi(v)$ преобразится по той же формуле $\pi\Phi(v) = v\Phi(\pi(K))$

- *Линейность* правила: $\Phi(v_1) + \Phi(v_2) = \Phi(v_1 + v_2)$ и $\Phi(\alpha v) = \alpha \Phi(v)$, где $(v + w)(K) = v(K) + w(K)$

- *Линейность* правила: $\Phi(v_1) + \Phi(v_2) = \Phi(v_1 + v_2)$ и $\Phi(\alpha v) = \alpha\Phi(v)$, где $(v + w)(K) = v(K) + w(K)$
- Нулевая полезность *болванов*, то есть такой игрок i, что для любой коалиции K верно $\Phi(K \cap i) = \Phi(K)$, не получает ничего

- *Линейность* правила: $\Phi(v_1) + \Phi(v_2) = \Phi(v_1 + v_2)$ и $\Phi(\alpha v) = \alpha \Phi(v)$, где $(v + w)(K) = v(K) + w(K)$
- Нулевая полезность *болванов*, то есть такой игрок i, что для любой коалиции K верно $\Phi(K \cap i) = \Phi(K)$, не получает ничего
    - Можно тогда определить *носитель* игры, то есть минимальную коалицию S такую, что для любой коалиции K верно $v(K) = v(K \cap S)$. Понятно, что это – всё множество, исключая "болванов"

Аксиоматизация

Крутой факт состоит в том, что вектор Шепли может определяться четырьмя последними свойствами. То есть:

Аксиоматизация

Крутой факт состоит в том, что вектор Шепли может определяться четырьмя последними свойствами. То есть:

Теорема (Шепли)

Существует и единственно Φ, удовлетворяющее условиям ниже, и оно задаётся нашей формулой $\sum_\tau \frac{x^\tau}{n!}$

1. *Отображение Φ – линейный оператор из* $\mathbb{R}^{2^N}$ *в* $\mathbb{R}^N$
2. Φ *симметрично, т.е.* $\forall \pi : N \to N$

$$\Phi[\pi v] = \pi \Phi[v]$$

3. *Для всякого болвана i верно* $\Phi[v](i) = 0$
4. *Сумма координат* $\Phi(v)$ *равна* $v(N)$

Доказательство.

Вообще, нам достаточно проверить только единственность. Введём для этого “базисные” игры: с каждой непустой коалицией S свяжем свою игру

$$v_S(K) = \begin{cases} 1 & \text{если} S \subset K \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство.

Вообще, нам достаточно проверить только единственность. Введём для этого "базисные" игры: с каждой непустой коалицией S свяжем свою игру

$$v_S(K) = \begin{cases} 1 & \text{если} S \subset K \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Эти игры линейно независимы и их ровно $2^n - 1$, поэтому они образуют базис векторного пространства всех игр на нашем множестве. Можно явным образои разложить игру v по этому базису:

$$v = \sum_S \mu(S) v_S, \text{где} \mu(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|S|-|T|} v(T)$$

Доказательство.

Вообще, нам достаточно проверить только единственность. Введём для этого "базисные" игры: с каждой непустой коалицией S свяжем свою игру

$$v_S(K) = \begin{cases} 1 & \text{если} S \subset K \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Эти игры линейно независимы и их ровно $2^n - 1$, поэтому они образуют базис векторного пространства всех игр на нашем множестве. Можно явным образои разложить игру v по этому базису:

$$v = \sum_S \mu(S) v_S, \text{где} \mu(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|S|-|T|} v(T)$$

Собственно, теперь мы можем проверять единственность только на этих базисных играх. Но тут понятно, что игроки не из S болваны и ничего не получают, а игроки из S все равноценны и получают поровну от $v(N)$. Что и требовалось доказать! □

Пример

Рассмотрим игру *Помещик и батраки*. У нас есть помещик (далее он будет обозначен игроком 0) и $n - 1$ батрак. Помещик, наняв k батраков получает от сбора урожая доход $f(k)$ (где $f(k)$ – монотонно возрастающая функция), часть из которого (никаким образом не фиксированная, это разделение между батраками и помещиком может быть любым) уходит к батракам (не обязательно всем поровну, разделение между ними также может быть любым). Батраки не могут получить доход сами по себе. Тогда у нас получается игра с побочными платежами:

Пример

Рассмотрим игру *Помещик и батраки*. У нас есть помещик (далее он будет обозначен игроком 0) и $n-1$ батрак. Помещик, наняв k батраков получает от сбора урожая доход $f(k)$ (где $f(k)$ – монотонно возрастающая функция), часть из которого (никаким образом не фиксированная, это разделение между батраками и помещиком может быть любым) уходит к батракам (не обязательно всем поровну, разделение между ними также может быть любым). Батраки не могут получить доход сами по себе. Тогда у нас получается игра с побочными платежами:

$$v(K) = \begin{cases} f(|K|-1) & \text{если} 0 \in K \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Посчитаем вектор Шепли для данной игры. Для начала рассмотрим помещика. Он с вероятностью $\frac{1}{n}$ заходит на шаге k, поэтому его значение равно $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)}{n}$. Это приблизительно равно площади под графиком функции f. Значения же батраков равны между собой и в сумме с помещиком дают $f(n)$

Посчитаем вектор Шепли для данной игры. Для начала рассмотрим помещика. Он с вероятностью $\frac{1}{n}$ заходит на шаге k, поэтому его значение равно $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)}{n}$. Это приблизительно равно площади под графиком функции f. Значения же батраков равны между собой и в сумме с помещиком дают $f(n)$
Посмотрим тогда на более конкретные значения. Пусть у нас $f(k) = k$. Тогда координата вектора Шепли для помещика будет равна $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{n(n-1)}{n} = (n-1)$. Значение полной коалиции – n, тогда для каждого из батраков вектор Шепли даёт значение $\frac{n-(n-1)}{n} = \frac{1}{n}$. То есть вектор Шепли для данной игры равен $(n-1, \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n})$