KKMS type theorems with boundary conditions

Степан Шахкаламов

ВШЭ

2020

Необходимые понятия и определения I

Пусть K - это симплициальный комплекс, обозначим множество его вершин $Vert(K)$.

Определение

Раскраской вершин K в n цветов назовем отображение

$$L : Vert(K) \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

Рассмотрим теперь $(n-1)$-мерный симплекс Δ^{n-1}, вершины которого есть базисные вектора $\mathbb{R}^n$ и каждому из чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ сопоставим его вершину. Таким образом раскраска L задает отбражение $f_L : Vert(K) \to \mathbb{R}^n$. Тогда для любой точки $p \in K$ можно выделить симплекс с вершинами $\{u_0, u_1, \ldots, u_k\}$, внутри которого она лежит, то есть $p = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i$. Доопределим тогда $f_L(p) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i(p) f_L(u_i)$

Необходимые понятия и определения II

Если в K нет $n-$цветных симплексов, то мы попали на границу Δ^{n-1}, которая гомеоморфна $\mathbb{S}^{n-2}$. Значит, можно определить гомотопический класс

$$\mu(L, K) = [f_L] \in [K, \mathbb{S}^{n-2}]$$

Пусть теперь $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ – набор векторов в $\mathbb{R}^n$, c_V – его центр масс.
Зафиксируем пространство X и его триангуляцию T. Пусть $U = \{U_1, U_2, \dots, U_m\}$ – открытое покрытие T,
$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ – соответствующее разбиение единицы.

Необходимые понятия и определения III

Тогда можно определить отображение

$$\rho_{\mathcal{U},\Phi,V} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x) v_i$$

Если предположить, что точка c_V не лежит в образе X, то определено отображение

$$f_{\mathcal{U},\Phi,V} = \frac{\rho_{\mathcal{U},\Phi,V} - c_V}{\| \rho_{\mathcal{U},\Phi,V} - c_V \|}$$

Это непрерывное отображение $T \to \mathbb{S}^{n-1}$, причем гомотопический класс $f_{\mathcal{U},\Phi,V}$ не зависит от Φ

$$\mu(\mathcal{U}, V) = [f_{\mathcal{U}}, V] \in [T, \mathbb{S}^{n-1}]$$

Необходимые понятия и определения IV

Введем еще несколько необходимых определений:

Определение

Пусть I – множество индексов мощности m, а $V = \{v_i, i \in I\}$ – набор точек в $\mathbb{R}^n$. Непустое подмножество $B \subset I$ называется сбалансированным относительно V, если $\forall i \in B$ существует неотрицательный набор весов λ_i таких, что $\sum_{i \in B} \lambda_i = 1$ и

$$\sum_{i \in B} \lambda_i v_i = c_V$$

То есть c_V лежит в выпуклой оболочке соответствующих v_i.

Необходимые понятия и определения V

Определение

Пара пространств (X, A) таких, что $A \subset X$ принадлежит EP_n, если непрерывное отображение $f : A \to \mathbb{S}^n$, такое что $[f] \neq 0$, не может быть продолжено до непрерывного $F : X \to \mathbb{S}^n$.

Определение

Покрытие $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ пространства T называется не нуль-гомотопичным, если пересечение S_i пусто и $\mu(S) \neq 0$ в классе $[T, \mathbb{S}^{n-2}]$.

Обобщение KKMS-теоремы I

Покажем, что верна следующая теорема:

Теорема

Пусть $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in \mathbb{R}^n$. A *– подпространство пространства* X, *причем* $(X, A) \in EP_{n-1}$. *Пусть* $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ *– покрытие* X, *а* $\mathcal{S}$ *– его ограничение на* A *– не нуль-гомотопично. Тогда в* $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ *существует сбалансированное подмножество* B, *такое что*

$$\bigcap_{i \in B} F_i \neq \emptyset$$

Proof. Предположим противное, тогда не существует искомого B, а значит $c_V \notin \rho_{\mathcal{F},V}(X)$. Это значит, что функция $f_{\mathcal{F},V} : X \to \mathbb{S}^{n-1}$ определена, как мы и говорили раньше. Но это расширение отображения $f_{\mathcal{S},V} : A \to \mathbb{S}^{n-1}$, что противоречит предположению, что $(X, A) \in EP_{n-1}$.

Обобщение KKMS-теоремы II

Таким образом мы доказали следующее обобщение KKM-леммы:

Теорема

Пусть $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ *– набор точек в* $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ *– покрытие* $\mathbb{B}^k$*, не нуль-гомотопичное на границе. Тогда в* $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ *существует сбалансированное относительно* V *подмножество* B*, такое что пересечение*

$$\bigcap_{i \in B} F_i \neq \emptyset$$

Обобщение KKMS-теоремы III

Отсюда так же следует сама KKMS-теорема:

Теорема

Пусть набор $\mathcal{K}$ – набор всех непустых подмножеств I_{k+1}, а Δ^k – k-мерный симплекс в $\mathbb{R}^k$ с вершинами $\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$. Пусть теперь $V = \{v_\sigma, \sigma \in \mathcal{K}\}$ – центры тяжести наборов вершин, соответствующих σ. Пусть покрытие $\mathcal{C} = \{C_\sigma, \sigma \in \mathcal{K}\}$ – покрытие Δ^k, такое что $\forall J \subset I_{k+1}$ соответствующий симплекс Δ_J покрыт набором $\{C_\sigma, \sigma \in J\}$. Тогда существует сбаланстрованное относительно V подмножество $B \subset \mathcal{K}$, такое что

$$\bigcap_{\sigma \in B} C_\sigma \neq \emptyset$$

Proof. Из утверждения следует, что $\mu(\mathcal{C}, V) = deg(f_{\mathcal{C},V}) = 1$, а значит выполнено утверждение предыдущей теоремы.

Так же отсюда следует, например, обобшение леммы Такера:

Теорема

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *– базис в* $\mathbb{R}^n$, $V = \{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n\}$, *а* $\mathcal{F} = \{F_1, F_{-1}, \dots, F_n, F_{-n}\}$ *– не нуль-гомотопичное на границе покрытие шара* $\mathbb{B}^k$*. Тогда существует такое* i*, что пересечение* F_i *и* F_{-i} *не пусто. В частности, если покрытие антиподально симметрично на границе шара, то существует такое* i*, что пересечение* $F_i \cap F_{-i} \neq \emptyset$

Proof. Достаточно заметить, что любое сбалансированное относительно V подмножество состоит из пар вида $(i, -i)$

Домашние задачи I

1. Выведите следующую формулировку KKMS-теоремы из доказанной выше: Пусть $\mathcal{K}$ – набор всех непустых подмножеств I_{k+1}, $\{C_\sigma, \sigma \in \mathcal{K}\}$ – покрытие k-мерного симплекса Δ^k, такое что $\forall J \subset I_{k+1}$ соответствующий симплекс Δ_J покрыт набором $\{C_\sigma, \sigma \in J\}$. Тогда существует подмножество $D \subset \mathcal{K}$, такое что $\bigcap_{\sigma\in} C_\sigma \neq \emptyset$, причем D удовлетворяет следующему условию: на D существует неорицательная весовая функция такая, что для любого $i \in I_{k+1}$ сумма весов подмножеств, содержащих i равна единице.

Домашние задачи II

2. Пусть множество $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_9\}$ точек из $\mathbb{R}^3$ задано следующем образом: точки $v_1, v_2, \ldots, v_8$ – это вершины единичного куба, а точка $v_9 = (0.5, 0.5, k)$. Найдите все такие k, при которых существует сбалансированное относительно V подмножество мощности не более 3.
3. Пусть V – множество вершин октаэдра, то есть множество точек $\pm e_i, i = 1, 2, 3$, $I = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Докажите, что сумма элементов любого сбалансированного относительно V подмножества равна 0.