НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Структура множеств равновесий Нэша

Глеб Красилич

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики» (Москва)

10 декабря 2020 г.

Напоминания и нотация

Основной предмет интереса - не-кооперативные конечные игры в нормальной форме

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ - игроки. $S_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$ - множество чистых стратегий игрока i.

Вектор $s = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ - профиль чистой стратегии.

$S = S_1 \times \dots \times S_n$ - пространство чистых стратегий.

$\pi_i : S \to \mathbb{R}$ - функция выигрыша для игрока i. $\pi : S \to \mathbb{R}^n$ - общая функция полезности.

Тройка $G = (I, S, \pi)$ - игра в чистом виде.

Напоминания и нотация

$x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ih}, \ldots x_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}$ - смешанная стратегия игрока i (вектор распределения вероятностей на S_i).
$\Delta_i = \{x_i \in \mathbb{R}_+^{m_i} \mid \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1\}$ - симплекс смешанных стратегий игрока i.

Напоминания и нотация

$x = (x_1, \dots, x_n)$ - профиль смешанной стратегии (может быть представлен как вектор в пространстве $\mathbb{R}^m$, где $m = m_1 + \dots + m_n$).
$\Theta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ - пространство смешанных стратегий ($(m - n)$-мерный многогранник в пространстве $\mathbb{R}^m$).

Напоминания и нотация

$u_i : \Theta \to \mathbb{R}$ - функция выигрыша игрока i для профиля смешанной стратегии (математическое ожидание $u_i(x) = \sum_{s \in S} x(s)\pi_i(s)$).
$u : \Theta \to \mathbb{R}^n$ - общая функция выигрыша для профиля смешанной стратегии.
Тройка $G = (I, \Theta, u)$ - игра в смешанном виде.

Напоминания и нотация

$\beta_i : \Theta \to 2^{S_i}$ - соответствие наилучшего чистого ответа игрока i для профиля смешанной стратегии
$(b_i(y) = \{h \in S_i \mid \forall k \in S_i \ u_i(e_i^h, y_{-i}) \geq u_i(e_i^k, y_{-i})\})$.
$\beta : \Theta \to 2^S$ - полное соответствие наилучшего чистого ответа.
$\tilde{\beta}_i : \Theta \to 2^{\Delta_i}$ - соответствие наилучшего смешанного ответа игрока i для смешанного профиля
$(\tilde{\beta}_i(y) = \{x_i \in \Delta_i \mid \forall z_i \in \Delta_i \ u_i(x_i, y_{-i}) \geq u_i(z_i, y_{-i})\})$.
$\tilde{\beta} : \Theta \to 2^\Theta$ - соответствие наилучшего смешанного ответа.

Напоминания и нотация

Профиль $x \in \Theta$ называется равновесием Нэша, если $x \in \tilde{\beta}(x)$.
Профиль $x \in \Theta$ называется строгим равновесием Нэша, если $\tilde{\beta}(x) = \{x\}$.
$\Theta^{NE} \subset \Theta$ - множество всех равновесий Нэша для игры (I, Θ, u).

Терема Нэша

Теорема

Для любой конечной игры множество Θ^{NE} не пусто.

Компоненты равновесий Нэша

Теорема

Θ^{NE} является дизъюнктивным объединением конечного числа замкнутых связных множеств. Члены этого дизъюнктивного объединения называются компонентами равновесий Нэша.

Компоненты равновесий Нэша

Заметим, что Θ^{NE} также можно определить следующем образом:

$$\Theta^{NE} = \{x \in \Theta \mid \forall i \in I \ \forall h \in S_i \ u_i(x) - u_i(e_i^h, x_{-i}) \geq 0\}$$

Если вспомнить, что профили $x \in \Theta$ можно воспринимать как вектора в $\mathbb{R}^m$, то можно понять, что $u_i(x) - u_i(e_i^h, x_{-i})$ является полиномом от m переменных.
Тогда само множество Θ^{NE} задаётся как совокупность точек, на которых m многочленов принимают неотрицательные значения.
Призовём на помощь вещественную алгебраическую геометрию.

Компоненты равновесий Нэша

Определение

Подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется полуалгебраическим, если оно удовлетворяет булевой комбинации полиномиальных уравнений и неравенств с вещественными коэффициентами.

Как было показано выше, Θ^{NE} является полуалгебраическим множеством.

Теорема (О цилиндрическом алгебраическом разложении)

Всякое полуалгебраическое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является дизъюнктивным объединением конечного числа множеств $C_1, \ldots, C_p$, причём каждое C_i гомеоморфно некоторому открытому гиперкубу $(0,1)^{d_i}$ ($d_i \leq n$; $(0,1)^0$ - точка).

Доказательство этой теоремы, как и другую информацию о полуалгебраических множествах, можно найти в работе Michel Coste AN INTRODUCTION TO SEMIALGEBRAIC GEOMETRY (http://gcomte.perso.math.cnrs.fr/M2/CosteIntroToSemialGeo.pdf).

Компоненты равновесий Нэша

Если у игры есть строгое равновесие, то оно само является компонентом-синглетоном.
Многие игры, однако, могут не иметь строгих равновесий. К таким играм, например, относятся игры в развёрнутой форме, в которых множество равновесий не достигает всех информационных множеств. Тем не менее, даже в таких случаях, зачастую, можно получить много информации о компонентах равновесий: для многих игр в развёрнутой форме функции выигрыша игроков константны на компонентах (Kreps, D., and R. Wilson. 1982. Sequential equilibrium. Econometrica 50: 863-94.).

Инвариантность множеств равновесий Нэша

Для задач эволюционной теории игр зачастую полезно использовать некоторые инварианты множества Θ^{NE} относительно модификаций функций выигрыша.
Во-первых, пусть $G = (I, S, \pi)$ и $G' = (I, S, \pi')$ - игры, при этом $\pi_i'(s) = \lambda_i \pi_i(s) + \mu_i$ (получаются аффинным преобразованием).
Легко проверить (упражнение), что π' сохраняет отношение доминирования и соответствие наилучших ответов.
Следовательно и множество Θ^{NE} тоже сохраняется.

Инвариантность множеств равновесий Нэша

Во-вторых, пусть $i \in I$, $v_i \in \mathbb{R}$. Положим $\pi_i'(s) = \pi_i(s) + v_i$, если $s_{-i} = \tilde{s}_{-i}$, и $\pi_i'(s) = \pi_i(s)$ в противном случае. Иными словами, мы прибавили одну и туже константу для выигрыша всех стратегий i-ого игрока при фиксированном профиле $\tilde{s}_{-i}$ всех остальных игроков.

u_i' - ассоциированная с π_i' функция выигрыша для смешанных стратегий.

Заметим, что $u_i'(x_i, y_{-i}) - u_i'(x_i, y_{-i}) = u_i(x_i, y_{-i}) - u_i(z_i, y_{-i})$ для всех профилей $y \in \Theta$ и стратегий $x_i, z_i \in \Delta_i$. Таким образом, когда игрок i сравнивает свои чистые или смешанные стратегии, он всегда приходит разности, которая не зависит от v_i. Следовательно соответствия наилучшего ответа и отношения доминирования не изменяются под локальными сдвигами v_i. Следовательно не меняется и Θ^{NE}.

Инвариантность множеств равновесий Нэша

Именно эти два преобразования широко используются в эволюционной теории игр, так как их удобно применять к играм для двух игроков.
Пусть такой игре соответствует пара матриц-выигрышей (A, B).
Преобразования первого типа для игрока 1 просто заменяют матрицу A на матрицу A', чьи коэффициенты имеют вид $a'_{hk} = \lambda_1 a_{hk} + \mu_1$. Аналогично преобразования первого типа для игрока 2 заменяют матрицу B.
Игрок 1 является игроком строк, поэтому преобразования второго типа добавляют одно и тоже число ко всем коэффициентам в одном столбце: $a'_{hk*} = a_{hk*} + v_1$ и $a'_{hk} = a_{hk}$, когда $k \neq k*$. На матрице B второго игрока при преобразованиях второго типа происходит тоже самое, только для строк.