

Семинар 11.

Всюду предполагается, что $\text{char } k \neq 2$.

Задача 1. (а) Сколькими парами соответственных точек определяется инволюция на \mathbb{P}^1 ?

(б) Стереографическая проекция $\varphi : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ коники \mathcal{C} на прямую \mathbb{P}^1 позволяет определить инволюцию $f : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ на конике \mathcal{C} как композицию $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$, где g - инволюция на \mathbb{P}^1 . Пусть f - инволюция на конике \mathcal{C} . Как устроено множество прямых $Xf(X)$, $X \in \mathcal{C}$?

Задача 2. Как мы знаем, в теореме Бриансона возможно совпадение двух и более точек касания в описанном около коники 6-угольнике. Тем самым, 6-угольник, описанный около коники, может вырождаться, например, в 5-угольник, 4-угольник и 3-угольник.

(а) Сформулируйте теорему Бриансона для описанного около коники 4-угольника.

(б) Сформулируйте теорему Бриансона для описанного около коники 3-угольника.

Задача 3. Даны три различные точки A, B, C на невырожденной конике \mathcal{C} . Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, образованный касательными в точках A, B, C . Пусть $\{A, A_1\} = (AA') \cap \mathcal{C}$, $\{B, B_1\} = (BB') \cap \mathcal{C}$, $\{C, C_1\} = (CC') \cap \mathcal{C}$. Итак, по тройке точек A, B, C построена новая тройка точек A_1, B_1, C_1 на \mathcal{C} . Покажите, что соответствие $\{A, B, C\} \rightsquigarrow \{A_1, B_1, C_1\}$ взаимно.

Задача 4. Даны невырожденная коника \mathcal{C} , точка $S \notin \mathcal{C}$ и прямые a, b, c, d через точку S , пересекающие конику \mathcal{C} в точках $A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1$ соответственно. Как связаны между собой двойные отношения $(ABCD)$ и $(A_1B_1C_1D_1)$?