Вопросы к устному экзамену во 2 модуле 2020/21 уч. г. по курсу «Дифференциальные уравнения»

Билет экзамена будет состоять из двух вопросов из списка. На подготовку даётся 45 минут, но уже через 30 минут вы должны быть готовы ответить минимум на один вопрос билета. Если вы пользуетесь понятием/результатом из первой части курса, вы должны уметь дать соответствующее определение/формулировку.

1. Действие диффеоморфизма на векторное поле и поле направлений. Симметрии поля направлений переводят интегральные кривые в интегральные кривые.

2. Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Порождение их векторными полями. Аналитическое выражение того, что ДУ $\dot{x} = f(x,t)$ имеет симметрию $H(t,x) = (\tau(t,x), y(t,x)$.

3. Поля направлений с однопараметрической группой симметрий. Понижение размерности системы.

4. Касательные векторы как дифференциальные операторы в точке (дифференцирования). Коммутатор векторных полей. Элементарные свойства ($[v, fu]$, тождество Якоби и др.).

5. Производная Ли одного векторного поля вдоль другого. Её связь с коммутатором.

6. Эквивалентность коммутирования потоков двух векторных полей и обращения в ноль их коммутатора.

7. Линейные неавтономные системы. Векторное пространство решений однородного уравнения. Линейная независимость его решений: как функций и в одной точке. Фундаментальная система решений. Фундаментальная матрица решений и её свойства. Метод вариации постоянных для решения неоднородной системы.

8. Определитель Вронского. Свойства определителя Вронского решений линейной системы. Формула Лиувилля—Остроградского.

9. Экспонента матрицы: определение, сходимость ряда, дифференциальное уравнение для $\exp(tA)$.

10. Свойства экспоненты: экспонента сопряжённой матрицы, экспонента суммы коммутирующих матриц. Вычисление экспоненты приведением к жордановой нормальной форме и с помощью интерполяционного многочлена от матрицы.

11. Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение однородного уравнения и неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части.

12. Фазовый портрет системы. Линеаризация особой точки векторного поля, её независимость от выбора координат. Теоремы Адамара—Перрона и Гробмана—Хартмана (без доказательства).

13. Устойчивость постоянных решений: по Ляпунову и асимптотическая. Примеры, различающие эти типы устойчивости. Теоремы Ляпунова и Четаева.

14. Линеаризация векторного поля в окрестности неподвижной точки. Независимость от системы координат. Теоремы об устойчивости/неустойчивости по линейному приближению.

15. Условие сохранения объёма операторами Коши ДУ. Исследование устойчивости периодического решения уравнения с периодической правой частью с помощью якобиана отображения за период.

16. Отображение первого возвращения (отображение Пуанкаре) замкнутой траектории векторного поля, его существование. Связь дифференциала отображения Пуанкаре и отображения за период. Исследование устойчивости замкнутой траектории двумерной системы с помощью якобиана отображения Пуанкаре.