НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

О теореме о неподвижной точки, теореме KKMS и ядре сбалансированных игр

Уткин Владимир

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

10 декабря 2020 г.

Немного про коалиции

Всё общество, содержащее m индивидов, обозначим за $\mathcal{S}$

Определение

Коалицией называется любое подмножество множества $\mathcal{S}$

- Обозначим множество всех коалиций за $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ - множество всех подмножеств множества $\mathcal{S}$.
- Множество всех образованных коалиций обозначим за $\mathcal{C}$

Немного про коалиции

- Пусть дан некоторый набор коалиций $\mathcal{C}$
- Если i - индивидуалист, то он образует свою коалицию {i}

Естественный набор $\mathcal{C}$, удовлетворяющий правилу:

$$\forall i \in \mathcal{S}\ \exists C \in \mathcal{C} : i \in C. \tag{1}$$

Условие дизъюнктности коалиций

$$C \in \mathcal{C} \text{ и } D \in \mathcal{C} \implies C \cap D = \varnothing \tag{2}$$

Немного про коалиции

- Пусть индивид i входит одновременно в коалицию D и коалицию C
- Зададим процент репрезентативности для каждой коалиции: $a^i_C > 0$ и $a^i_D > 0$, причем $a^i_C + a^i_D = 1$
- Соотношение о долях участия

$$\begin{cases} \sum_{C \in \mathcal{C}_i} a_C = 1 \ \forall i \in \mathcal{S} \\ \text{где } \mathcal{C}_i = \{C \in \mathcal{C} | i \in C\} \end{cases} \tag{3}$$

Сбалансированный набор коалиций

Определение

Сбалансированным набором коалиций называется такое подмножество $\mathcal{C}$ *множества* $\mathcal{P}(\mathcal{S})$, *что любой коалиции* $C \in \mathcal{C}$ *можно сопоставить число* $a_C > 0$, *удовлетворяющее соотношению*

$$\begin{cases} \sum_{C \in \mathcal{C}_i} a_C = 1 \ \forall i \in \mathcal{S} \\ \text{где } \mathcal{C}_i = \{C \in \mathcal{C} | i \in C\} \end{cases} \tag{3}$$

Симплексы и минимальные наборы

Предложение

Любой сбалансированный набор коалиций содержит минимальный набор

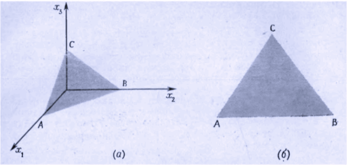

Рис. II.1. Симплекс $\Sigma(S)$ для $m=3$. Содержащее его пространство имеет размерность, равную трем, однако сам симплекс имеет размерность, равную двум. Это равносторонний треугольник ABC (а); более просто он изображается на содержащей его плоскости (б).

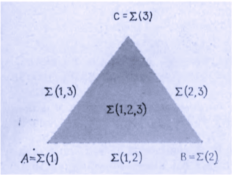

Рис. II.2. Указаны все грани предыдущего симплекса.

Симплексы и минимальные наборы

- Пусть u - константа. Рассмотри симплекс:

$$\Sigma(\mathcal{S}) = \{x \in \mathbb{R}_+^m | x_1 + ...x_m = u\}$$

- Любой коалиции A$\subset \mathcal{S}$ сопоставим грань $\Sigma(A)$ симплекса $\Sigma(\mathcal{S})$:

$$\Sigma(A) = \{x \in \mathbb{R}_i^m | x_i = 0 \; \forall i \notin A, \sum_{i \in A} x_i = u\}$$

Теорема

Каждой коалиции $A \subset \mathcal{S}$ *сопоставим такое замкнутое (возможно, пустое) множество* $F_A \subset \Sigma(\mathcal{S})$, *что*

$$\Sigma(B) \subset \bigcup_{A \subset B} F_A, \ \forall B \subset \mathcal{S}. \tag{4.1}$$

Тогда найдется сбалансированный набор коалиций $\mathcal{C}$ *и вектор* x, *который принадлежит всем множествам* F_C *для* $C \in \mathcal{C}$ *т.е.*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} F_C \neq \varnothing \tag{4.2}$$

Интерпретация

- Пусть m участникам требуется разделить данную сумму денег f.
- В этом случае любой вектор x из $\Sigma(\mathcal{S})$ представляет возможный дележ: i-я компонента x_i является долей, которая причитается участнику i.
- Тогда векторы y из $\Sigma(A)$ представляют дележи, в которых все достается A, а остальным - ничего.

Интерпретация

- Дележ происходит по некоторым правилам, в результате чего получается $F_A, A \in \mathcal{P}$. Векторы множества F_A представляют допустимые распределения, которые приемлемы для коалиции
- Теорема утверждает, что при условии (4.1) всегда возможно найти сбалансированный набор коалиций $\mathcal{C}$, а также дележ $x \in \Sigma(\mathcal{S})$, который приемлем для всех $C \in \mathcal{C}$

KKMS На математическом языке

Теорема

Пусть $\{C^S | S \in \mathcal{N}\}$ *семейство замкнутых подмножеств множества A, такое что*

$$\bigcup_{S \subseteq T} C^S \supseteq A^T \text{ для каждого } T \in \mathcal{N} \tag{5}$$

Тогда существует множество $\mathcal{B}$ *т.ч.*

$$\bigcap_{S \in \mathcal{B}} C^S \neq \varnothing$$

Подготовка к доказательству

Определение

Надлежащая манкировка множества A - это соответствие $L : A \mapsto \mathcal{N}$ *вида*

$$L(x) = \{S | x \in C^S\},$$

где C^S *- замкнутые подмножества множества A, удовлетворяющие (5)*

Идея доказательства теоремы: вложить A в больший симплекс $\acute{A}$ и построить отображение Какутани на $\acute{A}$ со свойством, что все его неподвижные точки лежат в A и имеют сбалансированные маркировки.

Доказательство

- Определим отображение
  $G : A \mapsto A$ как $G(x) = Com^S | S \in L(x)$
- Определим отображение
  $F : A \mapsto \hat{A}$ как $F(x) = x + m^N - G(x)$
- Рассмотрим больший симплекс
  $\acute{A} = \{x \in R^N | \sum_{i \in N} x_i = 1$ где $x_i \geqslant -1$ для всех $i\}$
- Определим сжимающее отображение $h : \acute{A} \mapsto A$ как

$$h_i(y) = \frac{max(y_i, 0)}{\sum_{j \in N} max(y_j, 0)} \text{ для всех } i \in N$$

Доказательство

- Продолжим функцию маркировки на $\acute{A}$:

$$\acute{L}(y) = \{S \in L(h(y)) | y_i \geqslant 0 \text{ для всех } i \in S\} \qquad (6)$$

- Пусть $\acute{G}(y) = Co\{m^S | S \in \acute{L}(y)$ convex valued, полунепрерывное сверху
- Определим $\acute{F} : \acute{A} \mapsto \acute{A}$ как

$$\acute{F}(y) = h(y) + m^N - \acute{G}(y)$$

- Поскольку $h(\acute{A}) = A$ получаем, что $\acute{F}(y) \subset A + A - A \subset \acute{A}$ для всех $y \in \acute{A}$

Доказательство

- Заметим, что $\acute{F}(x) = F(x)$ для всех $x \in A$
- Если $\hat{x} \in \acute{F}(\hat{x})$, тогда $\hat{x} = h(\hat{x}) + m^N - g$ для некоторого $g \in \acute{G}(\hat{(}x))$
- Положим, что $\hat{x} \in \acute{A} \backslash A$. Тогда $\hat{x}_i < 0$ для некоторого i. Из этого следует, что $h_i(\hat{x}) = 0$. Так же из (6) следует, что $g_i = 0$
- Тогда получаем противоречие:

$$\hat{x}_i = 0 + \frac{1}{n} - 0 > 0$$

Таким образом, $\hat{x} \in A$ и $L(\hat{x})$ сбалансированы