Симметричные игры двух игроков

Грачев Денис

ВШЭ

2020

Определение

Игра $G = (I, S, \pi)$ называется симметричной игрой двух игроков если

$$I = \{1, 2\}$$

$$S_1 = S_2$$

$$\pi_2(s_1, s_2) = \pi_1(s_2, s_1)$$

Иначе можно сказать что если A, B - матрицы выплат для первого и второго игрока, то $B = A^T$
Мы будем рассматривать случай, когда $S = \{1, 2\}$, то есть статегий всего 2.

Пример

Пример - Дилема заключенных.

Симметричные игры двух игроков

Определение

$K = \{1, 2, \ldots, k\}$ - *набор стратегий*
$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^k_+ : \sum_{i \in K} x_i = 1\}$
$\Theta = \Delta^2$ - *пространство смешанных стратегий*
$\beta^*(y) = \{x \in \Delta : u(x, y) \geqslant u(\hat{x}, y)\ \forall \hat{x} \in \Delta\}$ - *лучший ответ*

Определение

Игра называется дважды симметричной если $A^T = A$.
Так как $B^T = A$, *то* $B = A$. *Иначе говоря* $u(x, y) = u(y, x)$.

Симметричные игры двух игроков

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Равновесия Нэша на чистых стратегиях $S^{NE} = \{(1,1),(2,2)\}$
На смешанных стратегиях $(x,x) : x = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *Причем выплата в смешанном равновесии меньше чем в любом чистом.*

Определение

Равновесие $(x,y) \in \Delta^2$ *называется симметричным если* $x = y$.
$\Delta^{NE} = \{x \in \Delta : (x,x) \in \Theta^{NE}\}$
Геометрически это перечение множества Θ^{NE} *и диагонали* $D = \{(x,x) \in \Theta\}$.

Теорема

В симметричной игре всегда найдется симметричное равновесие Нэша.
Доказательство.
Множества Δ и $\beta^*(y) \subset \Delta$ непустые, выпуклые и компактные. β^* - непрерывное отображение. По теореме Какутани существует такой $y : y \in \beta^*(y)$.

Замечание.
В случае просто игр функция $\hat{\beta} : \Theta \to \Theta$.
В случае симметричных игр $\beta^* : \Delta \to \Delta$.

Симметричные игры двух игроков

Пример

Игра ястребы и голуби.

$$v < c$$

$$A = \begin{pmatrix} (v-c)/2 & v \\ 0 & v/2 \end{pmatrix}$$

Симметричного равновесия в чистых стратегиях тут нет.
Пусть игрок 2 играет стратегию 1 с вероятностью $p = \frac{v}{c}$*, тогда чистые стратегии 1 игрока дают одинаквые выплаты.*
Таким образом симметричное равновесие Нэша $(x, x) : x = (\frac{v}{c}, 1 - \frac{v}{c})$.

Пример

Камень ножницы бумага.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Игра с константной суммой, то есть

$$a_{ij} + b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$$

Нет чистых равновесий вообще.
Симметричное смешанное $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Классификация симметричных игр двух игрков

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Вычтем a_{21} из первого столбца и a_{12} из второго. Таким образом равновесие у новой игры будет таким же.
После этого сделаем замену. Рассмотрим все возможные случае a_1, a_2.

Классификация симметричных игр двух игрков

Вариант 1.

$a_1 < 0, a_2 > 0.$

Легко видеть, что стратегия 2 доминирует. Таким образом $\Delta^{NE} = \{e^2\}$.

Пример такого случая - Дилема заключенного.

Вариант 2.

$a_1, a_2 > 0.$

В этом случае есть два симметричных равновесия на чистых стратегиях и одно на смешанных

$\hat{x} = (\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a2})$

$\Delta^{NE} = \{e^1, e^2, \hat{x}\}$

Пример - выбор стороны движения транспорта.

Вариант 3.

$a_1, a_2 < 0$.

В данном случае равновесия на чистых стратегиях уже не симметрично.

Таким образом

$\Theta^{NE} = \{(e^1, e^2), (e^2, e^1), (\hat{x}, \hat{x})\}$

$\Delta^{NE} = \{\hat{x}\}$

Пример - игра ястребы и голуби.

Вариант 4.

$a_1 > 0, a_2 < 0$

Аналогично варианту 1.

Замечения

Игры как в варианте 2 хоть и имеют 3 равновесия, но кажется что рациональный игрок должен играть (e^1, e^1). Рассмотрим игру охота на оленя со следующей матрицей. Две стратегии - пойти за зайцем или остаться выслеживать оленя.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Равновесие (e^2, e^2) более выгодное, однако (e_1, e_1) - более надежное.

Источник

Weibull J: Evolutionary Game Theory, MIT Press 1995.