Равновесие в дискретной обменной экономике с деньгами

Пилипенко Александр

Высшая Школа Экономики

2020

Содержание

Описание

Рассмотрим экономику, в которой действуют n торговцев, каждый из которых владеет не более чем одним неделимым объектом и некоторым количеством общего делимого блага, которое можно считать деньгами.
У торговцев есть предпочтения по отношению к объектам и деньгам при усливии, что ни один торговец не желает иметь более одного объекта. Обычно объекты можно считать домами.

Пример

Интересен частный случай, когда некоторые торговцы, называемые продавцами, владеют домами, но не деньгами, а остальные, покупатели, владеют деньгами, но не домами.
В качестве другого примера можно представить продавцов как работников, желающих продать свои услуги, а покупателей как работодателей, желающих заполнить определенные вакансии.

Определения

Для упрощения задачи предположим, что каждый торговец владеет объектом. Это не накладывает дополнительных условий, так как для не владеющих объектами торговцев можем считать, что у них есть фиктивный объект, не представляющий никакой ценности.

- Обозначим множество объектов как $N = \{1, 2, \ldots, n\}$,
- Множество торговцев как T,
- Присвоение - биекция $\sigma : T \to N$,
- Цены на объекты зададим вектором $\vec{p} : N \to R_+$.

Равновесие

Для задания спроса мы предполагаем, что каждому α из T соответствует покрытие $\mathbb{R}_n$ $C^\alpha = \{C_0^\alpha, C_1^\alpha, \ldots, C_n^\alpha\}$.
Это означает, что если $p \in C_j^\alpha$, то торговец α купит объект $j > 0$ по цене p_j, если $j = 0$, то он хочет продать свой объект.

Определение

Равновесие - это пара (p, σ), состоящая из вектора цены p и присвоения σ таких, что $p \in C_{\sigma(\alpha)}^\alpha$, $\forall \alpha \in T$.

Предположения

Обозначим границу $\mathbb{R}_n^+$ как B_n.

- (1) Множества C_j^α замкнуты.
- (2) Набор множеств $\{C_1^\alpha, C_2^\alpha, \ldots, C_n^\alpha\}$ покрывает B_n.
- (3) $\exists M > 0$ такой, что если $p_i \geq M$, то $\notin C_i^\alpha$.

Теорема о равновесии

Если выполнены предположения (1) - (3), то существует равновесие (p, σ), где $p \in B_n$.

Для её доказательства нам потребуется обобщённая лемма ККМ.

Лемма ККМ

Пусть $\triangle_{n-1}$ - единичный (n-1)-мерный симплекс в $\mathbb{R}_n$. $\forall S \subset N$ обозначим как F_S грань $\triangle_{n-1}$, охватываемую единичными векторами $e_i, i \in S$. Замкнутое покрытие $\triangle_{n-1}$, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ называется покрытием ККМ, если $F_S \subset \bigcup\limits_i C_i$. Лемма ККМ утверждает, что $\bigcap\limits_i C_i$ непусто. Докажем обобщенную лемму ККМ.

Обобщение леммы

Пусть $\{C^1, C^2, \dots, C^n\}$ - набор ККМ покрытий $\triangle_{n-1}$. Тогда существует перестановка σ на N и точка $p \in \triangle_{n-1}$ такая, что $p \in C^i_{\sigma(i)}$ для всех $i \in N$.

Одним из результатов этой леммы будет теорема о дележе торта.

Содержание

Доказательство леммы

Докажем для открытых множеств C_j^i, откуда будет следовать доказательство для замкнутых. Зададим $\overline{C_j^i} = C_j^i - F_{N-\{j\}}$, для каждого из них выполнено ККМ свойство. Для каждого покрытия $\overline{C^i}$ возьмем соответствующее разбиение единицы. Т.о. непрерывные неотрицательные функции $f_j^i(p)$ такие, что $f_j^i(p) = 0 \; \forall p \notin C_j^i, \; \Sigma f_j^i(p) = 1$.
Зададим $F^i(p) = (f_1^i(p), \ldots, f_n^i(p))$, и $F = 1/n \Sigma F_i$. Из определения $\overline{C_j^i}$ следует, что F^i и F отображают каждую грань симплекса в себя, поэтому $nF(p) = (1, \ldots, 1)$ и значит матрица $nF = (f_j^i(p))$ дважды стохастическая $\Rightarrow$ есть такая перестановка σ, что $f_{\sigma(i)}^i(p) > 0 \Rightarrow p \in C_{\sigma(i)}^i$.

Доказательство теоремы о равновесии

Пусть Σ_n - пересечение B_n и единичного n-куба. Предъявим гомеоморфизм $\varphi : \Sigma_n \to \triangle_{n-1}$, т.ч. $\varphi(C_j^\alpha)$ - KKM покрытие. Тогда доказательство следует из Леммы.
Для каждой перестановки $\tau = (j_1, \ldots, j_n)$ элементов из N, зададим $\Sigma_\tau = \{p \in \Sigma_n : p_{j_1} \geq \cdots \geq p_{j_n} = 0\}$ и
$\triangle_\tau = \{x \in \triangle_{n-1} : x_{j_1} \leq \cdots \leq x_{j_n}; \ \Sigma X_{j_k} = 1\}$.

Доказательство теоремы о равновесии 2

Теперь мы можем определить $\varphi(\Sigma_\tau) = \triangle_\tau$ как
$(\varphi(p))_{j_k} = x_{j_k} = \dfrac{1 - p_{j_1}}{n} + \dfrac{p_{j_1} - p_{j_2}}{n-1} + \dots + \dfrac{p_{j_{k-1}} - p_{j_k}}{n-k+1}$.
Отсюда можно найти рекурсивные выражения для p_j:
$p_{j_1} = 1 - nx_{j_1}, p_{j_2} = (n-1)(x_{j_2} - x_{j_1}) + p_{j_1}$ и т.д., а также, что $\varphi(F_{N-\{j\}}) = \{p : p_j = 1\}$.
По предположению (3) C_j^α не пересекается с $\varphi(F_{N-\{j\}})$, а следовательно $\varphi(C_j^\alpha)$ с $F_{N-\{j\}}$, давая желаемое ККМ покрытие $\triangle_{n-1}$. А значит, теорема о равенстве доказана.

Источник