Улучшения равновесия Нэша

Калинкин Исаак Константинович

Высшая школа экономики
Факультет математики

2020

- $I = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков.
- S_i — конечное множество чистых стратегий игрока $i \in I$, количество таких стратегий $m_i := |S_i|$.
- $s = (s^1, \dots, s^n), s^i \in S_i$ — профиль чистых стратегий.
- $S = \times_i S_i$ — пространство чистых стратегий.
- $\pi_i(s) \in \mathbb{R}$ — платеж игрока i для профиля s.
- $G = (I, S, \pi)$ — игра в нормальной форме.

Смешанные стратегии

- Вектор $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ — смешанная стратегия игрока i, h-ая компонента x_{ih} которого равна вероятности сыграть стратегию с номером h.
- $\Delta_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{m_i} : \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1\}$ — симплекс, точки которого являются смешанными стратегиями игрока i.
- $e_i^1 = (1, 0, \ldots, 0), e_i^2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$ — вершины симлекса Δ_i.
- $\mathrm{int}(\Delta_i) = \{x_i \in \Delta_i : x_{ih} > 0 \, \forall h\}$ — внутренность Δ_i.
- $x = (x_1, \ldots, x_n), x_i \in \Delta_i$ — профиль смешанных стратегий.
- $\Theta = \times_i \Delta_i$ — пространство смешанных стратегий.
- $\mathrm{int}(\Theta) = \times_i \mathrm{int}(\Delta_i)$.
- $x(s) = \prod_{i=1}^n x_{is_i}$ — вероятность игроками сыграть профиль чистых стратегий s.
- $u_i(x) = \sum_{s \in S} x(s) \pi_i(s)$ — ожидаемый платеж профиля смешанной стратегии x.

Определение.

Пусть $G = (I, \Theta, u)$ — игра. *Функцией ошибки* μ называется отображение, которое каждому игроку i и стратегии $h \in S_i$ ставит в соответствие число $\mu_{ih} \in (0, 1)$ — вероятность сыграть стратегию «по ошибке», где $\sum_h \mu_{ih} \leq 1$.

Такая функция ошибки μ определяет для каждого игрока $i \in I$ подмножество $\Delta_i(\mu) = \{x \in \Delta_i : x_{ih} \geq \mu_{ih}\} \subset \mathrm{int}(\Delta_i)$ смешанных стратегий, которые игрок может выбрать с заданными вероятностями совершить ошибку.

Определение.

Соответствующая *игра дрожащих рук* — это $G(\mu) = (I, \Theta(\mu), u)$, где $\Theta(\mu) = \times_{i=1}^{n} \Delta_i(\mu) \subset \mathrm{int}(\Theta)$.

Свойства таких игр:

- $\Theta^{\mathrm{NE}}(\mu) \neq \emptyset$,
- $\Theta^{\mathrm{NE}}(\mu) \to \Theta^{\mathrm{NE}}$ при $\mu \to 0$.

Определение.

Профиль $x \in \Theta^{\mathrm{NE}}$ называется *равновесием дрожащей руки*, если для какой-то последовательности $\{G(\mu^t)\}_{\mu^t \to 0}$ игр дрожащих рук существуют профили $x^t \in \Theta^{\mathrm{NE}}(\mu^t)$, такие что $x^t \to x$.

В частности, $\mathrm{int}(\Theta^{\mathrm{NE}})$ состоит из равновесий дрожащих рук. Если $x \in \mathrm{int}(\Theta)$, то для достаточно малых μ_{ih}, $x \in \Theta(\mu)$. Более того, если $x \in \Theta^{\mathrm{NE}}$, то $x \in \Theta^{\mathrm{NE}}(\mu)$.
Обозначим через Θ^{PE} множество равновесий дрожащих рук.

Предложение.

Для любой конечной игры $\Theta^{PE} \neq \emptyset$.

Доказательство.

Для произвольной последовательности $\{G(\mu^t)\}_{\mu^t \to 0}$ выберем $x^t \in \Theta^{\mathrm{NE}}(\mu^t)$ для каждого t. Так как $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ — последовательность в компакте Θ, то у нее есть сходящаяся подпоследовательность $\{y^s\}_{s=1}^{\infty}$ с пределом $x^* \in \Theta$. Для каждого s игра $G(\mu^s)$ будет соответствующей игрой дрожащих рук.

По непрерывности, $x^* \in \Theta^{\mathrm{NE}}$ и x^* — равновесие дрожащих рук, так как $y^s \to x^*$ и $y^s \in \Theta^{\mathrm{NE}}(\mu^t)$ для всех s. $\square$

Определение.

Для заданного $\varepsilon > 0$ профиль стратегий $y \in \text{int}(\Theta)$ является ε-собственным, если выполнено

$$u_i(e_i^h, y_{-i}) < u_i(e_i^k, y_{-i}) \Rightarrow y_{ih} \leq \varepsilon y_{ik}.$$

Любая внутренняя точка равновесия Нэша $y \in \Theta^{\text{NE}}$ является ε-собственной для любого $\varepsilon > 0$, так как все чистые стратегии каждого игрока дают тот же самый максимальный платеж против y.

Определение.

Профиль $x \in \Theta^{\text{NE}}$ называется *собственным равновесием*, если для какой-то последовательности $\varepsilon^t \to 0$ существует ε^t-собственные профили $y(\varepsilon^t)$, такие что $y(\varepsilon^t) \to x$.

Определение.

Профиль $x \in \Theta^{\mathrm{NE}}$ называется *строгим равновесием дрожащей руки*, если для **всех** последовательностей $\{G(\mu^t)\}_{\mu^t \to 0}$ игр дрожащих рук существуют профили $x^t \in \Theta^{\mathrm{NE}}(\mu^t)$, такие что $x^t \to x$.

Пример. (Игра без строгого равновесия дрожащей руки)

Рассмотрим игру двух игроков, представленную двумя матрицами платежей A и B (где $\alpha, \beta > 0$) для игроков 1 и 2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лучший ответ игрока 2 на любую стратегию игрока 1 — стратегия $x_2 = (1,0,0)$, поэтому равновесие Нэша Θ^{NE} состоит из одной компоненты $\{x \in \Theta : x_{21} = 1\}$.

Пример. (Продолжение)

Все профили стратегий равновесия Нэша являются равновесиями дрожащей руки, но не строгими, они все неустойчивы к некоторым отклонениям от равновесных стратегий.

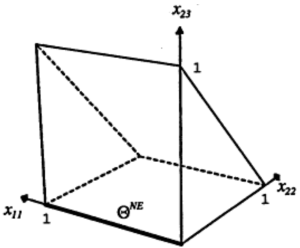

Рис.: Множество Θ^{NE}.

Определение.

Платежным расстоянием между играми $G = (I, S, \pi)$ и $G' = (I, S, \pi')$ называется число

$$d(G, G') = \max_{i \in I, s \in S} |\pi_i(s) - \pi_i'(s)|.$$

Определение.

Профиль $x \in \Theta^{\mathrm{NE}}$ называется *существенным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $d > 0$, такое что каждая игра G', которая находится на расстоянии меньшем d от G, имеет равновесие Нэша, расстояние от которого до x меньше ε.

Улучшения в рамках подмножеств

Определение.

Подмножество $X \subset \Theta^{\mathrm{NE}}$ называется *стратегически стабильным*, если оно минимально по отношению к следующему свойству: X непусто и замкнуто, а для каждого $\varepsilon > 0$ существует $d > 0$, такое что каждая игра $G(\mu) = (I, \Theta(\mu), u)$ дрожащих рук с вероятностью ошибки $\mu_{ih} < d$ имеет равновесие Нэша на расстоянии меньшем ε от множества X.

Здесь минимальность означает то, что множество не должно содержать в себе собственного подмножества, обладающего таким свойством.

Определение.

Непустое замкнутое множество $X \subset \Theta^{\mathrm{NE}}$ называется *существенным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $d > 0$, такое что для каждой игры G' с платежным расстоянием до G меньшем d имеет равновесие Нэша на расстоянии меньшем ε до множества X.

Пример.

В прошлом примере Θ^{NE} состояло из одной компоненты. Таким образом, $X = \Theta^{\mathrm{NE}}$ существенно и содержит стратегически стабильное подмножество Y. Чтобы подмножество Y было устойчивым ко всем ошибкам, необходимо, чтобы в Y были концы отрезка Θ^{NE}. Действительно, $Y = \{(e_1^1, e_1^2), (e_2^1, e_1^2)\}$ стратегически стабильно и существенно.