Задачи (версия от 16.12.2020 – окончательная)

В задачах используются определения и обозначения из лекций. Ниже я напоминаю некоторые из них.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathbb{P})$, такое что $\#\Omega < \infty$, и случайные величины $\xi_0, \dots, \xi_T$ на нем, $T \geq 0$, со значениями в множестве $\{1, \dots, L\}$, где $L \in \mathbb{N}$. Множество $\{1, \dots, L\}$ называется *множеством состояний*. Рассмотрим вектор $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_L^{(0)})$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющими $\sum_{j=1}^L p_j^{(0)} = 1$. Рассмотрим так же матрицы $\Pi_n = (p_n(i,j))_{1 \leq i,j \leq L}$, $1 \leq n \leq T$ с неотрицательными компонентами, такими что $\sum_{j=1}^L p_n(i,j) = 1$ для любого i и n.

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\xi_0, \dots, \xi_T$ образует *марковскую цепь* (МЦ) с начальным распределением $p^{(0)}$ и матрицами переходных вероятностей (МПВ) Π_n (или с переходными вероятностями $p_n(i,j)$), если

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \dots, \xi_T = i_T) = p_{i_0}^{(0)} p_1(i_0, i_1) \cdots p_T(i_{T-1}, i_T) \quad \text{для любых} \quad i_0, \dots i_T \in \{1, \dots, L\}.$$

Определение. Квадратная матрица A называется *стохастической*, если ее элементы неотрицательны и их сумма по каждой строке равна единице.

Определение. Вектор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ называется *неотрицательным* ($\mu \geq 0$), если $\mu_j \geq 0\ \forall j$. Неотрицательный вектор μ называется *распределением*, если сумма его компонент равна единице. Если не оговорено иное, то распределения – всегда вектора-строки (а не столбцы).

Обозначения и соглашения:

- Если не оговорено иное – множество состояний МЦ всегда $\{1, \dots, L\}$.
- Через $p^{(n)}$ обозначается распределение МЦ $\xi_0, \dots, \xi_T$ в момент времени n, то есть вектор-строка $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, \dots, p_L^{(n)})$ с компонентами $p_j^{(n)} = \mathbb{P}(\xi_n = j)$, $1 \leq j \leq L$.
- Для однородных МЦ мы обычно обозначаем МПВ через Π, а переходные вероятности — через p_{ij} (так что $\Pi = \Pi_n$ и $p_{ij} = p_n(i,j)$ для всех n, i, j.)

Задачи по темам лекций до 12.10.2010

Отмечу, что в задачах 1-6 ниже МЦ, вообще говоря, неоднородные.

1. Докажите, что случайные величины $\xi_0, \dots, \xi_T$ образуют МЦ с начальным распределением $p^{(0)}$ и вероятностями перехода $p_n(i,j)$ в том и только том случае, когда выполнены следующие три условия:

   1. $\mathbb{P}(\xi_0 = i) = p_i^{(0)}$ для всех $i \in \{1, \dots, L\}$.

   2. $\mathbb{P}(\xi_k = i_k | \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0) = \mathbb{P}(\xi_k = i_k | \xi_{k-1} = i_{k-1})$ для любых $i_0, \dots, i_k \in \{1, \dots, L\}$ и $1 \le k \le T$, таких что $\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0) \neq 0$.

   3. $\mathbb{P}(\xi_k = i | \xi_{k-1} = j) = p_k(j,i)$ для любых $i, j \in \{1, \dots, L\}$ и $1 \le k \le T$, таких что $\mathbb{P}(\xi_{k-1} = j) \neq 0$.

   Указание: Импликация $\Rightarrow$ была доказана на лекции.

2. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \dots, \xi_T$ образует марковскую цепь со множеством состояний $X := \{1, \dots, L\}$. Докажите, что для любого n и любых множеств $A \subset X \times \ldots \times X$ ($T - n$ раз), $C \subset X \times \ldots \times X$ ($n - 1$ раз) и любого $a \in X$ выполнено

   $$\mathbb{P}\big((\xi_T, \dots, \xi_{n+1}) \in A | \xi_n = a, (\xi_{n-1}, \dots, \xi_0) \in C\big) = \mathbb{P}\big((\xi_T, \dots, \xi_{n+1}) \in A | \xi_n = a).$$

   В частности, $\mathbb{P}(\xi_{n+k} = i | \xi_n = j, (\xi_{n-1}, \dots, \xi_0) \in C) = \mathbb{P}(\xi_{n+k} = i | \xi_n = j)$.

3. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

   а)Квадратная $n \times n$-матрица A – стохастическая.

   б) 1. $Af \ge 0$ для всех неотрицательных векторов-столбцов. 2. $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^t$, а t обозначает транспонирование.

   в) Если вектор-строка μ – распределение, то μA – тоже распределение.

4. Докажите, что произведение стохастических матриц одинакового размера так же является стохастической матрицей.

5. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \dots, \xi_T$ образует МЦ. Рассмотрим биекцию $f : \{1, \dots, L\} \mapsto \{1, \dots, L\}$. Верно ли, что последовательность $f(\xi_0), \dots, f(\xi_T)$ образует МЦ? А если не предполагать биективность f? Если ответ отрицательный – привести контрпример.

6. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \dots, \xi_T$ образует МЦ. Верно ли, что последовательность $\xi_T, \dots, \xi_0$ образует МЦ?

7. Пусть $\xi_0, \dots, \xi_T$ — однородная МЦ с множеством состояний $\{1, 2, 3\}$, матрицей переходных вероятностей $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и начальным распределением $p^{(0)} = (1/3, 1/6, 1/2)$. Найдите а) $p^{(2)}$ б) $\mathbb{P}(\xi_1 = 3, \xi_3 = 2)$.

Задачи по теме лекции 16.10.2020

В лекции обсуждалась модель Гальтона-Ватсона рождения-умирания. Напомню некоторые обозначения. Пусть η_n^i — независимые одинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие $\eta_n^i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\eta_n^i \leq M$ для некоторого M и всех n, i. Случайная величина η_n^i играет роль числа потомков i-го индивидуума из n-ого поколения. Пусть ξ_n обозначает число индивидуумов в n-ом поколении, где $\xi_0 \in \mathbb{N}$, $\xi_0 \leq K$ для некоторого K, — заданная случайная величина, а $\xi_{n+1} := \sum_{i=1}^{\xi_n} \eta_n^i$ при $n \geq 0$.

Задачи 2-4 ниже содержат куски доказательства теоремы 15 о вероятности вымирания в модели Гальтона-Ватсона, не приведенные на лекции. Напомню формулировку теоремы.

Теорема 15. Вероятность вымирания $\varepsilon := \mathbb{P}(\exists n:\ \xi_n = 0) < 1$ при $\mathbb{E}\eta_n^i > 1$ и $\varepsilon = 1$ при $\mathbb{E}\eta_n^i \leq 1$, если только η_n^i не равны 1 тождественно (точнее, если $\mathbb{P}(\eta_n^i = 1) < 1$).

Отмечу, что если η_n^i не равны тождественно 1, но каждый индивидуум в среднем имеет одного потомка, т.е. $\mathbb{E}\eta_n^i = 1$, то все равно все умрут с вероятностью единица.

1. Докажите, что последовательность случайных величин $\xi_0, \dots, \xi_T$ образует марковскую цепь для любого T. Вычислите переходные вероятности $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = j|\xi_n = i)$, если $\mathbb{P}(\eta_n^i = 0) = p$, $\mathbb{P}(\eta_n^i = 2) = 1 - p$, где $0 < p < 1$.

2. Пусть теорема 15 о вероятности вымирания доказана для случая, когда $\xi_0 \equiv 1$ (т.е. ξ_0 не случайно, точнее, $\xi_0(\omega) = 1$ для всех ω). Докажите ее для случая произвольного $\xi_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего $\xi_0 < K$ для некоторого K.

3. Пусть $\xi_0 \equiv 1$. Пусть φ_n обозначает производящую функцию случайной величины ξ_n, а φ — производящую функцию случайной величины η_n^i. Покажите, что $\varphi_n = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ (n раз) для всякого $n \geq 1$.

4. Пусть $\xi_0 \equiv 1$. Докажите, что если $\mathbb{E}\eta_n^i > 1$, то $\varepsilon < 1$ и что в этом случае ε — единственное решение уравнения $\varphi(x) = x$, удовлетворяющее $0 \leq x < 1$, где функция φ определена в предыдущей задаче.

   Указание. Посмотрите лекцию.

Задачи от лекции 23.10.2020

1. Рассмотрим следующие МПВ:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Являются ли они эргодическими?

   Напоминание: МПВ Π *называется эргодической, если существует* $k \in \mathbb{N}$*, такое что все элементы матрицы* Π^k *строго положительны. Другими словами, если для МЦ с МПВ* Π *за* k *шагов можно попасть из любого состояния в любое.*

2. Рассмотрим случайное блуждание на множестве состояний $\{1, \dots, L\}$, заданное вероятностями перехода $p_{ii+1} = p$ и $p_{ii-1} = 1 - p$ для $2 \le i \le L - 1$, $p_{12} = a$, $p_{11} = 1 - a$ и $p_{LL-1} = b$, $p_{LL} = 1 - b$ для каких-нибудь $0 < p < 1$ и $0 < a, b \le 1$, а для остальных i, j выполнено $p_{ij} = 0$.

   a) Докажите, что соответствующая матрица переходных вероятностей эргодична тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из неравенств $a < 1$ или $b < 1$.

   b) Для произвольных a, b, p как выше найдите стационарное состояние. Единственно ли оно?

3. Рассмотрим модель Эренфестов: берем N пронумерованных от 1 до N шаров и два ящика, часть шаров лежит в одном, а часть в другом. Наугад называем номер от 1 до N (с равными вероятностями) и перекладываем шар с этим номером из ящика, где он лежал, в другой. Нас интересует число шаров в каждом ящике. Конечно, достаточно знать число шаров в первом ящике, на это имеется $N + 1$ возможность, от 0 до N.

   (1) Докажите, что модель Эренфестов задает марковскую цепь с $N + 1$ состоянием (состояние– число шаров в первом ящике). Вычислите переходные вероятности.

   (2) Найдите стационарное состояние для модели Эренфестов. Единственно ли оно?

   (3) Эргодична ли МПВ в модели Эренфестов?

Лирическое отступление.

Модель Эренфестов – известная ранняя стохастическая модель в статистической механике. Статистическая механика ставит своей целью объяснить поведение макроскопических систем с точки зрения микроскопической динамики частиц. Например, динамику газа с точки зрения динамики молекул.

Стат. механика задает, например, такие вопросы. Почему газ, изначально собранный в одной половине комнаты, распространится по всей комнате и уже никогда не вернется в ту половину, где он был изначально? Ведь согласно теореме Пуанкаре о возвращении [1] это должно произойти (но тут ответ простой: время, которое придется ждать, чтобы это произошло, больше времени существования вселенной). А вот гораздо более сложный, *до сих пор открытый вопрос* (грубо говоря, это называется "эргодическая гипотеза"): почему газ равномерно заполнит обе половины комнаты, и если температура газа в начальный момент времени была распределена неоднородно, то со временем она выровняется?

Модель Эренфестов – простейшая модель, чтобы изучать "равномерное заполнение газом комнаты". Кстати говоря, как наверное вы увидите из последующих задач, эта модель не очень хороша: она не обладает свойством сходимости к равновесию (эргодичности), так что "равномерного заполнения комнаты"и "выравнивания температуры"не происходит (хотя почти происходит). Более подробно на доступном языке о модели Эренфестов можно почитать в книге М.Кац, "Вероятность и смежные вопросы в физике". Речь о том, почему вообще вероятностные модели появляются в физике и почему они хороши. В первом приближении тут такое правило: чем больше в модели стохастики, тем проще она для строгого анализа (учи теорвер!), но тем дальше она от жизни (реальные молекулы не прыгают случайно из одной половины комнаты в другую). Однако, согласно современному пониманию статистической физики, какую-то случайность в систему все равно нужно вводить, иначе (а) с ней не получится сделать никакого строгого анализа (б) ее поведение далеко не всегда будет соответствовать нашим физическим ожиданиям. [2]

Раз такая пьянка, то заодно *очень* порекомендую научпопулярную книгу Д.Рюэль, "Случайность и хаос— сравнительно коротко и классно о том же, на популярном языке, от одного из известнейших стат. физиков 20-го (ну, и 21-го) века.

[1] См. Википедию, а лучше, к примеру, В.И. Арнольд, "Математические методы классической механики".

[2] Насколько я знаю, когда делается прогноз погоды, в уравнения метеорологии добавляется случайный шум: так результат оказывается лучше.

Задачи от лекции 27.10.2020

Определение. Марковская цепь называется *эргодической*, если она имеет единственное стационарное состояние π и существуют постоянные $C > 0$, $0 < \lambda < 1$, такие что для любого начального распределения $p^{(0)}$ выполнено $|\pi - p^{(n)}|_1 \le C\lambda^n$, для любого n. Здесь $|v|_1 := \sum_j |v_j|$.

Из эргодической теоремы следует, что если МПВ эргодична, то МЦ тоже эргодична. Обратное неверно!

1. Эргодичны ли марковские цепи с МПВ из задачи 1 предыдущего блока?

2. а) При каких $0 < a, b \le 1$ случайное блуждание из задачи 2 предыдущего блока эргодично при произвольном $0 < p < 1$?

   б) Эргодична ли марковская цепь из модели Эренфестов? (это задача с контрольной, кто уже решил – молодец).

3. Верно ли, что всякая марковская цепь, имеющая единственное стационарное состояние, эргодична?

4. Рассмотрим (однородную) МЦ $\xi_0, \xi_1, \dots$ с множеством состояний $\{1, \dots, L\}$, $L \ge 2$, такую что $p_{11} = 1$. Допустим, что для каждого состояния $2 \le i \le L$ существует $k_i \ge 1$, такое что $p_{i1}^{(k_i)} > 0$ — вероятность перейти из состояния i в состояние 1 за k_i шагов положительна.

   а) Покажите, что МПВ такой МЦ не может быть эргодической.

   б) Докажите, что последовательность $(p_{i1}^{(m)})_{m\ge 0}$ не убывает.

   в) Покажите, что $\mathbb{P}(\xi_{mk} \ne 1) \le (1-\delta)^m$ для любого $m \ge 1$, где $k = \max_i k_i$, а $\delta = \min_i p_{i1}^{(k_i)} > 0$.

   А теперь выводы:

   г) Покажите, что $\mathbb{P}(\exists k \ge 0 : \ \xi_n = 1 \, \forall n \ge k) = 1$ (т.е. с вероятностью единица мы приезжаем в состояние 1 и там живем.)

   д) Покажите, что такая МЦ эргодична и $\pi = (1, 0, \dots, 0)$ — ее единственное стационарное состояние.

5. *Необязательная задача (дополняющая предыдущую).* Рассмотрим МЦ $\xi_0, \xi_1, \dots$, с множеством состояний $\{1, \dots, L\}$, $L \ge 2$, такую что $p_{11} = 1$ и $p_{22} = 1$. Допустим, что для каждого состояния $3 \le i \le L$ существует $k_i \ge 1$, такое что хотя бы одна из вероятностей $p_{i1}^{(k_i)}$ либо $p_{i2}^{(k_i)}$ положительна. Покажите, что такая МЦ не может быть эргодической. Докажите, что

$$\mathbb{P}(\exists k \ge 0 : \ \xi_n = 1 \, \forall n \ge k \text{ or } \xi_n = 2 \, \forall n \ge k) = 1$$

   (т.е., в зависимости от точки старта, мы падаем либо на состояние 1, либо на состояние 2).

Задачи от лекции 10.11.2020

Первые две задачи использовались на лекции без доказательства и были оставлены в качестве упражнений.

1. Пусть случайные величины ξ_n, η_n, ξ, η определены на одном и том же вероятностном пространстве и $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$ при $n \to \infty$ по вероятности. Докажите, что $\xi_n + \eta_n \to \xi + \eta$ по вероятности.

2. Пусть числовая последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, сходится, $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Докажите, что тогда она сходится по Чезаро к тому же пределу, т.е. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \to x$.

3. Привести пример МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, такой что она не эргодична, но для нее выполнен ЗБЧ (в том виде, в котором он формулировался на лекции).

   Указание: возможно, здесь удобнее искать пример, для которого выполнен усиленный ЗБЧ: он формулируется так же как и обычный, но вместо сходимост $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \to \langle \pi, f\rangle$ *по вероятности утверждается сходимость почти наверное:* $\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k(\omega)) \to \langle \pi, f\rangle) = 1$. *Усиленный ЗБЧ влечет обычный, так как сходимость почти наверное влечет сходимость по вероятности.*

4. Привести пример МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, такой что для нее не выполнен ЗБЧ. То есть, существует функция f, для которой предел последовательности $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)$ по вероятности либо не существует, либо зависит от начального условия.

5. Рассмотрим случайное блуждание из задачи 2 от 23.10 и допустим, что $a < 1$. Вычислите частоту посещения крайних состояний 1 или L, то есть найдите предел $\frac{\#\{0 \le i \le n-1 : \xi_i = 1 \text{ или } L\}}{n}$ при $n \to \infty$ по вероятности, где $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — марковская цепь, ассоциированная с этим случайным блужданием.

   (Как и в задаче 2 от 23.10, ответ может оказаться некрасивым).

6. (*Дополнительная задача.*) Рассмотрим эргодическую марковскую цепь $\xi_0, \xi_1, \ldots$ и обозначим через ν_{ij}^n случайную величину, равную числу таких $1 \le k \le n$, при которых $\xi_{k-1} = i$, а $\xi_k = j$. Вычислите предел по вероятности ν_{ij}^n / n при $n \to \infty$.

   Указание: если вдруг не найдется более простого способа, то нужно рассуждать как при доказательстве ЗБЧ.

Задачи от лекции 17.11.2020

I. До этого мы (почти) всегда рассматривали марковские цепи $\xi_0, \dots, \xi_T$, живущие конечное время T. Это было удобно тем, что в этом случае можно было рассматривать конечное множество элементарных событий Ω. При этом для того, чтобы изучать поведение марковской цепи при времени, стремящемся к бесконечности (например, в эргодической теореме), мы выкручивались так: мы говорили, что если нас интересует момент времени $n > T$, то вместо исходной МЦ $\xi_0, \dots, \xi_T$ мы просто рассматриваем новую МЦ $\widetilde{\xi}_0, \dots, \widetilde{\xi}_n$, с теми же переходными вероятностями и начальным распределением, что и исходная МЦ. Естественно, при этом распределения $p^{(k)}$ и $\widetilde{p}^{(k)}$ случайных величин ξ_k и $\widetilde{\xi}_k$ при $k \le T$ совпадали, поэтому, поступая с обозначениями вольно, мы не писали верхние волны, но писали просто $\xi_0, \dots, \xi_n$ (если из лекций вы не уловили, что мы делали именно так – то знайте, да, делали – это разумный способ обойти проблему конечного времени жизни цепи). Сейчас, для задач 3 и 4, это становится совсем неудобным, поэтому предлагаю определить что такое МЦ, живущая бесконечное время.

Определение. Последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n\ge 0}$ называется МЦ с начальным распределением $p^{(0)}$ и вероятностями перехода $p_n(i,j)$, если для любого $T \ge 0$ последовательность $\xi_0, \dots, \xi_T$ является МЦ с теми же начальным распределением и вероятностями перехода.

Для МЦ, живущей бесконечное время, конечным множеством элементарных событий Ω уже не обойтись, и пример построения подходящего вероятностного пространства я приводить не буду.

II. Рассмотрим однородную марковскую цепь $\xi_0, \xi_1, \dots$, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbb{P})$, и случайную величину τ на том же вероятностном пространстве, такую что для каждого $n \ge 0$ событие $\{\tau = n\}$ лежит в алгебре, *порожденной случайными величинами* $\xi_0, \dots, \xi_n$. Другими словами, существует такое множество $A_n \subset \{1, \dots, L\}^{\times n}$ [3], что множество $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = n\}$ имеет вид $\{\omega \in \Omega : (\xi_0, \dots, \xi_n)(\omega) \in A_n\}$. Такая случайная величина τ называется *момент остановки (stopping time)*. К примеру, случайная величина $\tau_A = \inf\{n \ge 0 : \xi_n \in A\}$, где $A \subset \{1, \dots, L\}$, является моментом остановки (ее смысл – первый момент времени, когда процесс входит в множество A; здесь и далее $\inf \emptyset := \infty$). А случайная величина $\widetilde{\tau}_A = \inf\{n \ge 0 : \xi_{n+1} \in A\}$ не является моментом остановки. Отмечу, что константа – так же момент остановки.

III. На лекции мы обсуждали закон больших чисел (ЗБЧ), классический и для цепей маркова. А вот *усиленный* классический ЗБЧ:

Теорема. Пусть случайные величины $\eta_0, \eta_1, \dots$ независимы, одинаково распределены и имеют конечный второй момент, т.е. $\mathbb{E}\eta_j^2 < \infty$ (в частности, отсюда следует $\mathbb{E}|\eta_j| < \infty$ – докажите!). Тогда случайная величина $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j$ удовлетворяет

$$\mathbb{P}\Big(\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} \to \mathbb{E}\eta_0 \text{ при } n \to \infty\Big) = 1.$$

Такая сходимость называется *сходимостью почти наверное (или почти всюду)*. Обозначается $S_n/n \to \mathbb{E}\eta_0$ п.н. (либо п.в.; на английском – a.s. (almost surely)). Из

[3] Здесь написано прямое произведение n копий множества $\{1, \dots, L\}$.

сходимости почти наверное *следует* сходимость по вероятности. Вид сходимости — единственное отличие усиленного ЗБЧ от обычного. Доказательство усиленного ЗБЧ сложнее, чем обычного, см. например учебник Ширяева.

IV. Для марковских цепей также верен усиленный ЗБЧ. Его формулировка совпадает с формулировкой обычного ЗБЧ, данной на лекции, но вместо сходимости по вероятности имеет место сходимость почти наверное.

1. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — марковская цепь. Докажите, что $\xi_k, \ldots, \xi_n$ — тоже марковская цепь, для любых $0 \le k \le n$, с теми же вероятностями перехода.

2. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — эргодическая [4] марковская цепь со стационарным распределением π. Докажите, что существует постоянная $C > 0$, такая что для всех a, b, n выполнено $|\mathbb{P}(\xi_n = a|\xi_0 = b) - \pi_a| \le C\lambda^n$, где $0 < \lambda < 1$ — постоянная из эргодической теоремы.

3. Рассмотрим однородную марковскую цепь $\xi_0, \xi_1, \ldots$ с вероятностями перехода (p_{ij}) и момент остановки τ. Докажите *сильное марковское свойство (strong Markov property)*:

   $$\mathbb{P}(\xi_{\tau+1} = j|\xi_\tau = i, (\xi_{\tau-1}, \ldots, \xi_0) \in B_{<\tau}, \tau < \infty) = \mathbb{P}(\xi_{\tau+1} = j|\xi_\tau = i, \tau < \infty) = p_{ij},$$

   для всех i, j и произвольного набора множеств $B_{<n} \subset \{1, \ldots, L\}^{\times n}$, $n \ge 1$.

   Комментарий: Если $\tau = const$, то сильное марковское свойство превращается в обычное марковское свойство. Можно показать, что сильное марковское свойство переговаривается следующим образом: при условии, что $\tau < \infty$ и $\xi_\tau = i$, случайный процесс $(\xi_{\tau+n})_{n\ge1}$ не зависит от процесса $(\xi_n)_{n\le\tau}$ и имеет такое же распределение, как исходный процесс $(\xi_n)_{n\ge0}$, взятый при условии, что $\xi_0 = i$. Отсюда становится понятным, почему сильное марковское свойство столь часто используется при решении различных задач, связанных с марковскими цепями. В частности, оно позволяет дать ответ на вопрос как ведет себя цепь начиная с момента ее входа в некоторое множество $A \subset \{1, \ldots, L\}$, то есть начиная с момента τ_A: она ведет себя так же, как исходная цепь, с начальным условием в точке, через которую вы вошли в A.

4. Рассмотрим эргодическую марковскую цепь со стационарным состоянием π и допустим, что $\pi_1 > 0$. Рассмотрим следующую последовательность моментов остановки:

   $$\tau_1 = \{\inf k \ge 0 : \xi_k = 1\}, \quad \tau_n = \{\inf k > \tau_{n-1} : \xi_k = 1\}, \quad n \ge 2,$$

   где $\inf \emptyset := \infty$. Таким образом, τ_n— n-ый момент попадания процесса в состояние 1.

   а) Докажите, что для каждого начального распределения $p^{(0)}$ верно $\mathbb{E}(\tau_1)^r < \infty$ для любого $r \ge 0$ (говорят, что случайная величина τ_1 имеет *конечные моменты*). Как следствие, покажите, что при каждом начальном распределении $p^{(0)}$ имеем $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$.

[4] Если речь идет об эргодичности свойствах, то МЦ всегда предполагается однородной.

Указание: используя следствие 22 эргодической теоремы, оцените сверху вероятность $\mathbb{P}(\tau_1 > k)$. При доказательстве этого следствия не использовалась эргодичность МПВ, но только эргодичность цепи, поэтому его можно применять.

б) Докажите, что случайные величины τ_1 и $\tau_2 - \tau_1$ независимы, а если начальное распределение удовлетворяет $p_1^{(0)} = 1$ (то есть, в начальный момент времени мы сидим в состоянии 1), то они одинаково распределены. Выведите отсюда, что, в частности, $\mathbb{E}(\tau_2)^r < \infty\ \forall r > 0$.

в) Рассуждая аналогично, докажите, что τ_1, $\tau_2 - \tau_1$, $\tau_3 - \tau_2$, ... — последовательность независимых случайных величин. Покажите, что эти случайные величины, кроме τ_1, имеют одинаковое распределение, а в случае, когда $p_1^{(0)} = 1$, и τ_1 имеет то же распределение. Покажите, что, в частности, $\mathbb{E}(\tau_n)^r < \infty\ \forall r > 0$.

г) Докажите, что $\tau_n / n \to \mathbb{E}(\tau_2 - \tau_1)$ при $n \to \infty$, п.н.

д) Докажите, что $\mathbb{E}(\tau_2 - \tau_1) = (\pi_1)^{-1}$.

Указание: пусть $\nu_1^n = \#\{0 \le i \le n-1 : \xi_i = 1\}$. Применяя усиленный ЗБЧ для марковских цепей, найдите предел последовательности $\nu_1^{\tau_n}/\tau_n$. А чему равно $\nu_1^{\tau_n}$?

Задачи от лекции 24.11.2020

1. Рассмотрим однородную МЦ с переходными вероятностями (p_{ij}). Докажите, что если для распределения π выполнено соотношение

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \qquad \forall i, j,$$

то π — стационарное состояние этой МЦ. Верно ли обратное утверждение?

2. С помощью алгоритма Метрополиса-Хастингса постройте эргодическую МЦ с тремя состояниями, такую что распределение $\pi = (7/15, 1/5, 1/3)$ является ее (единственным) стационарным состоянием.

3. Компания "Рога и Копыта" плохо пережила карантин и стала выплачивать дивиденды своим акционерам нерегулярно. И если в данном месяце она не выплатила дивиденды, то в следующем месяце она их не выплатит с вероятностью 0.6. Но если дивиденды были выплачены, то в следующем месяце они будут выплачены с вероятностью 0.9. При условии, что компания не оправится от карантина в течение достаточно длительного времени, какой процент от максимально возможного числа дивидендных выплат за этот период стоит ожидать получить ее акционерам?

Задачи от лекции 15.12.2020

1. Докажите второй пункт теоремы Перрона-Фробениуса (о единственности положительных левого и правого собственных векторов): пусть матрица $A = (a_{ij}) > 0$ в том смысле, что $a_{ij} > 0$ для всех i, j. Тогда, если вектор-столбец $v = (v_1, \ldots, v_j)^t$ положителен в том смысле, что $v_j > 0\ \forall j$, и $Av = \mu v$ для некоторого $\mu \in \mathbb{R}$, то $\mu = \lambda$ и $v = const\, e$, где λ и e — собственное число и правый собственный вектор из первого пункта теоремы П-Ф. Докажите аналогичный результат для левого собственного вектора.

2. *(Дополнительная задача).* Пусть Π — стохастическая матрица. Как обсуждалось на лекции, она имеет собственное значение равное единице. Докажите, что ее собственные значения λ, отличные от единицы, удовлетворяют неравенству $|\lambda| \leq 1$, а в случае, когда $\Pi > 0$ (в смысле предыдущей задачи), — неравенству $|\lambda| < 1$.

3. *(Дополнительная задача).* Докажите эргодическую теорему для марковских цепей с положительными матрицами переходных вероятностей методами линейной алгебры, без предположения о том, что собственные значения МПВ различны (которое было сделано на лекции, при доказательстве утверждения 34).

   Точнее, пусть Π — стохастическая матрица, а Λ — ее жорданова нормальная форма.

   а) Покажите, что если собственное значение λ матрицы Π удовлетворяет $|\lambda| = 1$, то соответствующий ему блок в Λ имеет размер 1×1 (то есть, он состоит из единственного элемента, равного λ).

   б) Предположим, что $\Pi > 0$ (в смысле задачи 1). Вычислите предел Λ^n при $n \to \infty$. Покажите, что Π^n также сходится. Выведите эргодичность марковской цепи с матрицей переходных вероятностей Π.