Ведение в алгебраическую топологию

Задачи семинара I, 17.09.2020

1. Дайте определение факторпространства $\overline{X} = X/A$, где A-замкнутое подпространство. Зачем требовать условие замкнутости для A? Верно ли, что имеется биекция между непрерывными отображений $\overline{X} \to Y$ и непрерывными отображениями $X \to Y$, переводящими A в точку?

2. Докажите, что $B^n/\partial B^n \simeq S^n$.

3. Докажите, что надстройка сферы гомеоморфна сфере, $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$.

4. Докажите, что надстройка букета сфер (в ее редуцированном варианте) гомеоморфна букету сфер, $\Sigma \bigvee S^{n_i} \simeq \bigvee S^{n_i+1}$.

5. Докажите, что всякий конус является стягиваемым пространством.

6. Приведите пример компактного пространства, гомотопически эквивалентного данному. Во всех перечисленных ниже случаях в качестве такого компактного пространства можно взять букет сфер. Определите количество сфер и их размерности.

   (а) $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$;
   (б) $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$;
   (в) $\mathbb{R}^2 \setminus (n$ точек);
   (г) $\mathbb{R}^k \setminus \{a\}$;
   (д) $\mathbb{R}^k \setminus (n$ точек);
   (е) $\mathbb{R}^k \setminus (n$ точек);
   (ж) (тор) $\setminus$ (точка);
   (з) (поверхность рода g) $\setminus$ (n точек);
   (и) $\mathbb{R}^3 \setminus$ (пара скрещивающихся прямых$\}$;
   (к) $\mathbb{R}^3 \setminus$ (пара пересекающихся прямых$\}$;
   (л) $\mathbb{R}^3 \setminus$ (стандартно вложенная окружность$\}$;
   (м) тор с диском, приклеенным к нему вдоль одной из его параллелей.

7. Докажите, $S^m * S^n \simeq S^{m+n+1}$.

Ведение в алгебраическую топологию
Задачи семинара II, 24.09.2020

Во всех задачах этого листка под гомологиями подразумеваются симплициальные гомологии с целыми коэффициентами.

1. Докажите равенство $\partial \circ \partial = 0$ в цепном комплексе для симплициальных гомологий.

2. Вычислите симплициальные гомологии точки.

3. Вычислите $H_0(X)$ для произвольного симплициального множества X.

4. Вычислите симплициальные гомологии окружности S^1, выбрав в качестве ее симплициальной модели а) треугольник; б) n-угольник для произвольного $n \geq 3$.

5. Вычислите симплициальные гомологии a) тетраэдра (вместе с его внутренностью); b) поверхности тетраэдра, гомеоморфной сфере S^2.

6. Вычислите симплициальные гомологии n-мерного симплекса для произвольного n. Какой ответ следует ожидать до всяких вычислений, если иметь ввиду гомотопическую инвариантность гомологий?

7. Вычислите симплициальные гомологии n-мерной сферы, реализовав ее как граница $(n+1)$-мерного симплекса. (Указание: сравните цепной комплекс этой задачи с комплексом предыдущей задачи для всего $(n+1)$-мерного симплекса.)

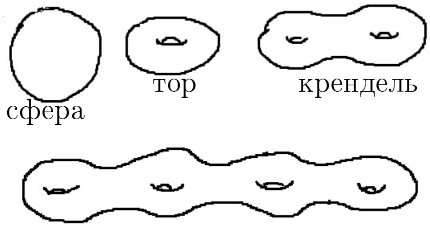
8. Выберите какую-нибудь симплициальную реализацию и вычислите симплициальные гомологии двумерного тора $T^2 \simeq S^1 \times S^1$.

9. Выберите какую-нибудь симплициальную реализацию и вычислите симплициальные гомологии проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

Ведение в алгебраическую топологию

Задачи семинара III, 01.10.2020

Сфера с g-ручками (или *поверхность рода g*) S_g — поверхность в трехмерном пространстве, изображенная на рисунке.



Количество «дырок», или, точнее, «ручек» $g \geq 0$ называется *родом* поверхности. При $g = 0$ мы получаем сферу, при $g = 1$ — тор, при $g = 2$ — крендель, и т.д.

1. Докажите, что поверхность рода g получается из $4g$-угольника склейкой подходящим образом его стороны попарно. Изобразите образы склеенных сторон. Полученные $2g$ замкнутые кривые $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ на поверхности в литературе обычно так и называются: *a,b-циклы*.

Всякая компактная поверхность допускает *триангуляцию* — разбиение ее на конечное число треугольников. *Ориентация* триангулированной поверхности — ориентация всех его треугольников, согласованная на ребрах (уточните, что это значит). Поверхность, допускающая ориентацию, называется *ориентируемой*.

2. Докажите, что для всякой двумерной компактной поверхности $H_2(M) = \mathbb{Z}$, если M ориентируема и $H_2(M) = 0$, если M неориентируема.

3. Докажите, что поверхность S_g ориентируемая.

4. Выберите какое-нибудь симплициальное разбиение S_g и вычислите его (симплициальные) гомологии. Докажите, что
$$H_0(S_g) = \mathbb{Z}, \quad H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(S_g) = \mathbb{Z}.$$
Предъявите образующие этих групп.

5. Докажите, что $S_{g_1} \# S_{g_2} = S_{g_1+g_2}$, и что S_g гомеоморфна связной сумме g копий двумерного тора.

6. Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ неориентируема.

7. Может ли быть ориентируемой $M \# N$, если хотя бы одна из поверхностей M или N неориентируема?

8. Докажите, что $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ гомеоморфна бутылке Клейна.

В действительности, всякая связная *ориентируемая* компактная поверхность гомеоморфна S_g (связной сумме g торов) для некоторого g. А всякая связная *неориентируемая* компактная поверхность гомеоморфна связной сумме некоторого количества проективных плоскостей.

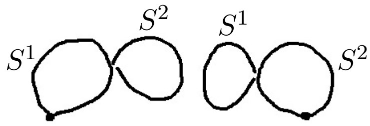
9. Какое место в приведенной классификации занимает поверхность, полученная в результате связной суммы, в которой участвуют как проективные плоскости, так и торы? Докажите, что $\mathbb{R}P^2 \# T^2 \simeq \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Ведение в алгебраическую топологию

Задачи семинара IV, 08.10.2020

1. Какие из представленных ниже разбиений на клеки являются клеточными пространствами, а какие не являются?

(а) Букет сферы S^2 и окружности S^1, разбитые на три клетки размерностей 0, 1, 2 как на следующих двух рисунках:



(б) Замкнутый двумерный диск, разбитый на его внутренность (двумерная клетка) и точки граничной окружности (каждая из которых представляет собой 0-мерную клетку).

(в) Букет счетного числа окружностей, каждая из которой разбита на выделенную точку букета и ее дополнение.

(г) Объединение окружностей на плоскости радиусов $1/n$ для всевозможных натуральных n, касающихся друг друга в одной точке, разбитое на одну нульмерную клетку (общая точка касающихся окружностей) и бесконечное число интеравалов, полученных выбрасыванием из каждой из окружностей отмеченной точки?

(д) Полскость $\mathbb{R}^2$, разбитая на одну единственную двумерную клетку. Если это не является клеточным разбиением плоскости, предъявите разбиение, которое таковым является.

2. Дайте определение «числа оборотов» замкнутого пути на плоскости, не проходящего через начало координат, как степени подходщего отображения.

3. Найдите степень следующих отображений:

(а) Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, продолженное по непрерывности на сферу Римана $S^2 = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(б) Аналогично для отображения, задаваемого произвольным многочленом степени n. Как полученный ответ связан с «основной теоремой алгебры», утверждающей, что у всякого комплексного многочлена имеется хотя бы один комплексный корень?

(в) Аналогично для отображения комплексного сопряжения $z \mapsto \bar{z}$.

(г) Аналогично для отображения, задаваемого рациональной функцией $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$, где f и g — многочлены степеней m и n, соответственно.

(д) *Отображение Гаусса* $C \to S^2$, где C — поверхность рода g (сфера с g ручками), вложенная в $\mathbb{R}^3$ (выберите произвольное удобное вам вложение), и S^2 — стандартная единичная сфера в трехмерном пространстве. Отображение сопоставляет точке поверхности вектор единичной нормали в этой точке.

(е) Антиподальная инволюция $x \mapsto -x$ единичной n-мерной сферы в $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Пусть задана пара замкнутые кривых C_1 и C_2 в $\mathbb{R}^3$, не имеющие общих точек. Их *индексом зацепления* называется степень отображения $C_1 \times C_2 \to S^2$, $(x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}$. Сравните это определение с другими, которые вам известны или приходят в голову. Зависит ли индекс зацепления от ориентации кривых C_1 и C_2? А от порядка этих кривых в паре?

Ведение в алгебраическую топологию

Задачи семинара V, 15.10.2020

1. Вычислите клеточные гомологии следующих пространств и опишите геометрически образующие этих групп:
   а) S^2;
   б) $T^2 = S^1 \times S^1$;
   в) сфера с g ручками S_g;
   г) S^n;
   д) $S^m \bigvee S^n$;
   е) $S^m \times S^n$
   (пространства $S^m \times S^n$ и $S^m \bigvee S^n \bigvee S^{m+n}$ имеют равные группы гомологий. Являются ли эти пространства гомотопически эквивалентными?);
   ё) выразите гомологии букета $X \bigvee Y$ через гомологии пространств X и Y;
   ж) $T^n = (S^1)^n$;
   з) $\mathbb{C}P^n$;
   и) $\mathbb{R}P^2$;
   к) бутылка Клейна K^2;
   л) $\mathbb{R}P^n$.

2. Постройте пространство X, имеющее селедующие группы гомологий:

$$H_0(X) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X) = \mathbb{Z}_3, \quad H_k(X) = 0 \quad \text{при} \quad k > 1.$$

3. Докажите, что для гладкого компактного n-мерного многообразия M выполняется

$$H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & M \text{ ориентируемо,} \\ 0, & M \text{ неориентируемо.} \end{cases}$$

   При каких n ориентируемо $\mathbb{R}P^n$?

   В случае, когда M ориентируемо, образующая группы $H_n(M) \simeq \mathbb{Z}$ называется *фундаментальным классом* и обозначается через $[M]$. Эта образующая определена с точностью до знака. Выбор знака равносилен выбору ориентации многообразия.

4. Пусть $f : M \to N$ — непрерывное отображение гладких компактных ориентированных многообразий одинаковой размерности n. Докажите, что гомоморфизм $f_* : H_n(M) \to H_n(N)$ переводит $[M]$ в $d\,[N]$, где d — степень отображения f.

5. Вычислите гомоморфизм f_* (во всех градуировках) для следующих отображений:
   а) f — вложение в ленту Мёбиуса её граничной окружности;
   б) антиподальная инволюция $S^n \to S^n$;
   в) проекция в факторпространство $T^2 \to T^2/S^1$, где $S^1 \subset T^2$ — вложенная в тор окружность, ограничивающая диск;
   г) аналогично, когда окружность $S^1 \subset T^2$ является одним из меридианов;
   д) диагональное вложение $S^n \to S^n \times S^n$.

6. Постройте клеточное разбиение и вычислите гомологии многообразия Грассмана $G_{2,4}$, образованного всевозможными двумерными подпространствами четырехмерного векторного пространства.

Ведение в алгебраическую топологию
Задачи семинара VI, 22.10.2020

Подробнее про грассманиан $G_{2,4}$. Его точки представляются матрицами 2×4, строки которой представляют векторы в $\mathbb{R}^4$, порождающие данную плоскость. Матрица имеет максимальный ранг (т.е. 2) и определена с точностью до линейного преобразования ее строк. Всякую такую матрицу можно привести линейными преобразованиями строк однозначно к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

где на месте звездочек стоят произвольные вещественные числа. Номера столбцов i и j, $1 \le i < j \le 4$, на которых стоят столбцы $\binom{1}{0}$ и $\binom{0}{1}$, соответственно, однозначно определяются точкой пространства $G_{2,4}$ следующими условиями: i — это номер первого ненулевого столбца, j — это номер первого столбца, линейно независимого от i-го. Подмножество в $G_{2,4}$, отвечающее фиксированной паре индексов (i, j), образует клетку: координатами в ней служат числа на месте звездочек. Таким образом, мы получаем клеточное разбиение пространства $G_{2,4}$, состоящее из $\binom{4}{2} = 6$ клеток. Элементы этого клеточного разбиения называются *клетками Шуберта* (аналогичное клеточное разбиение Шуберта имеется на произвольном грассманиане).

Традиционно для обозначения клеток Шуберта вместо пары индексов (i, j) используется пара индексов $(3 - i, 4 - j)$. Первая и вторая компонента этой пары — количество звездочек в первой и второй строке матрицы, соответственно. Кроме того, нулевые индексы, для краткости, отбрасываются. Одно из удобств такого соглашения заключается в том, что сумма индексов равна размерности клетки. Вот более явный список клеток получившегося разбиения:

$$\sigma_\emptyset : \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$$
$$\sigma_1 : \left(\begin{smallmatrix} 0&1&*&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$$
$$\sigma_{1,1} : \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&* \\ 0&0&1&* \end{smallmatrix}\right) \qquad \sigma_2 : \left(\begin{smallmatrix} 1&*&*&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$$
$$\sigma_{2,1} : \left(\begin{smallmatrix} 1&*&0&* \\ 0&0&1&* \end{smallmatrix}\right)$$
$$\sigma_{2,2} : \left(\begin{smallmatrix} 1&0&*&* \\ 0&1&*&* \end{smallmatrix}\right)$$

Наибольшую размерность 4 имеет клетка $\sigma_{2,2}$. Вообще, $G_{2,4}$ — гладкое 4-мерное многообразие (полезно понять, почему это так, независимо от клеточного разбиения). Цепной комплекс получившегося клеточного разбиения имеет вид

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}^2 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow 0.$$

Вот уточненная формулировка последней задачи предыдущего семинара.

1. Задайте произвольным образом ориентации клеток, найдите коэффициенты инцидентности, и вычислите гомологии (целочисленные и с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) получившегося цепного комплекса для шубертовского клеточного разбиения грассманиана $G_{2,4}$.

Рассмотрим также многообразие $G^+_{2,4}$, образованное *ориентированными* двумерными подпространствами в $\mathbb{R}^4$. Забывание ориентации определяет двулистное накрытие $G^+_{2,4} \to G_{2,4}$. Разбиение на клетки Шуберта переностится на $G^+_{2,4}$, и в нем в два раза больше клеток.

2. Вычислите гомологии многообразия $G^+_{2,4}$.

Введение в алгебраическую топологию

Контрольная работа (вариант 1)

29.10.2020

1.[10] Докажите, что следующая последовательность групп и гомоморфизмов

$$0 \longleftarrow C_0 = \mathbb{Z}_{12} \xleftarrow{6} C_1 = \mathbb{Z}_{12} \xleftarrow{6} C_2 = \mathbb{Z}_{12} \longleftarrow 0,$$

в которой два средних гомоморфизма задаются умножением на 6, является цепным комплексом. Вычислите его гомологии.

2. Вычислите целочисленные гомологии следующих пространств:

а)[10] $\mathbb{R}P^3$ с выколотой точкой;

б)[15] $\mathbb{R}P^3$ с парой выколотых точек;

в)[20] двумерный остов четырехмерного симплекса Δ^4, т.е. объединение его двумерных граней.

3.[15] Существует ли непрерывное отображение полнотория на свою границу, тождественное на этой границе?

4.[30] Докажите, что формула

$$(x, y, z) \mapsto (2xz, 2yz, z^2 - x^2 - y^2)$$

задает непрерывное отображение единичной двумерной сферы в себя. Гомотопно ли оно тождественному?

Введение в алгебраическую топологию

Контрольная работа (вариант 2)

30.10.2020

1.[10] Докажите, что следующая последовательность групп и гомоморфизмов

$$0 \longleftarrow C_0 = \mathbb{Z}_{20} \xleftarrow{10} C_1 = \mathbb{Z}_{20} \xleftarrow{10} C_2 = \mathbb{Z}_{20} \longleftarrow 0,$$

в которой два средних гомоморфизма задаются умножением на 10, является цепным комплексом. Вычислите его гомологии.

2. Вычислите целочисленные гомологии следующих пространств:

а)[15] $\mathbb{R}^3$ без пары (стандартно вложенных) незаузленных незацепленных окружностей;

б)[15] симметрический квадрат окружности, т.е. пространство неупорядоченнх пар (возможно, совпадающих) точек на ней;

в)[15] объединение единичной двумерной сферы в $\mathbb{R}^3$ и трех дисков, образованных пересечением координатных плоскостей с единичным шаром.

3.[15] Существует ли непрерывное отображение ленты Мёбиуса на свою границу, тождественное на этой границе?

4.[30] Докажите, что отображение проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ в себя, задаваемое в однородных координатах формулой

$$(x : y : z) \mapsto (2xz : 2yz : z^2 - x^2 - y^2),$$

корректно определено (и непрерывно). Гомотопно ли оно тождественному?

Введение в алгебраическую топологию

Повторная контрольная работа (вариант 3)
07.11.2020

1.[10] Пусть $\gamma : [0,1] \to X$ — непрерывный путь, соединяющий точки $a = \gamma(0)$ и $b = \gamma(1)$ и рассматриваемый как сингулярный 1-симплекс. Обозначим через $\overline{\gamma}$ тот же путь, пройденный в обратном направлении, $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$. Проверьте, что сингулярная 1-цепь $a = \gamma + \overline{\gamma}$ обладает свойством $\partial a = 0$. Постройте сингулярную 2-цепь b, такую что $\partial b = a$.

2. Вычислите целочисленные гомологии следующих пространств:

а)[15] S^3 без стандартно вложенной (незаузленной) окружности;

б)[15] две копии $\mathbb{R}P^2$ склеенные вдоль окружности, вложенной в каждую из обеих проективных плоскостей в качестве проективной прямой;

в)[15] две копии сферы S^2 склеенные вдоль окружности, вложенной в каждую из обеих сфер в качестве экватора;

3.[15] Найдите степень отображения $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$, заданного в однородных координатах формулой

$$(x : y : z) \mapsto (x^3 : y^3 : z^3).$$

4.[30] Существует ли непрерывное отображение f букета $S^2 \vee S^2$ в себя, такое, что f не гомотопно тождественному, а его третья итерация $f \circ f \circ f$ гомотопна тождественному отображению?

Introduction to algebraic topology

Additional medterm test
07.11.2020

1.[10] Let $\gamma : [0,1] \to X$ be a continuous path connecting points $a = \gamma(0)$ and $b = \gamma(1)$ and considered as a singular 1-simplex. Denote by $\overline{\gamma}$ the reversed path, $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$. Check that the singular 1-chain $a = \gamma + \overline{\gamma}$ satifies $\partial a = 0$. Construct a singular 2-chain b such that $\partial b = a$.

2. Compute integer homology of the following spaces:

a)[15] S^3 without standardly embedded (unknotted) circle;

б)[15] two copies of $\mathbb{R}P^2$ glued along a circle embedded to each of the two copies of the projective plane as a projective line;

в)[15] two copies of the sphere S^2 glued along a circle embedded to each of the two copies of the sphere as an equator;

3.[15] Compute the degree of the map $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ given in homogeneous coordinates by

$$(x : y : z) \mapsto (x^3 : y^3 : z^3).$$

4.[30] Does there exist a continuous mapping f of the wedge product $S^2 \vee S^2$ to itself such that it is not homotopic to identity but its third iteration $f \circ f \circ f$ is homotopic to identity?

Ведение в алгебраическую топологию
Задачи семинара VII, 12.11.2020

1. Вычислите все члены длинной точной последовательности гомологий и связывающие их гомоморфизмы для следующих пар:
   а) (X, pt);
   б) (лента Мёбиуса, её граничная окружность);
   в) (S^2, S^0);
   г) $(\mathbb{T}^2, S^1)$, где S^1 — одна из параллелей на торе;
   д) $(\mathbb{T}^2, S^1)$, где окружность S^1 ограничивает диск.

2. Вычислите гомологии факторпространства полнотория по его границе
   а) из длинной точной последовательности;
   б) из клеточного разбиения;
   в) из двойственности Пуанкаре.

Ведение в алгебраическую топологию
Задачи семинара VIII, 19.11.2020

1. Вычислите гомологии трехмерного многообразия W касательных векторов единичной длины к ориентируемой поверхности C рода g.

   Указание. Обозначим через $\pi : W \to C$ естественную проекцию, сопоставляющую касательному вектору его точку касания. Слой этого отображения — это окружность единичных касательных векторов, приложенных к одной точки поверхности. Представим поверхность в виде объединения $C = C_1 \cup C_2$, где C_1 — замкнутый вложенный диск, а C_2 — замыкание его дополнения. Соответственно, W представляется в виде объединения $W = W_1 \cup W_2$, где $W_1 = \pi^{-1}(C_1)$, $W_2 = \pi^{-1}(C_2)$. Воспользуйтесь для вычисления гомологий пространства W длинной точной последовательностью пары (W, W_2) (или (W, W_1), на ваш выбор).

2. Проверьте, что при $g = 1$ многообразие W задачи 1 гомеоморфно $\mathbb{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$. Сравните ответ задачи 1 с известными вам гомологиями трехмерного тора.

3. Проверьте, что при $g = 0$ многообразие W задачи 1 гомеоморфно $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$. Сравните ответ задачи 1 с известными вам гомологиями проективного пространства $\mathbb{R}P^3$.

Ведение в алгебраическую топологию

Задачи семинара IX, 04.12.2020

1. Вычислите кольца когомологий следующих пространств:
(а) S^n;
(б) $S^m \times S^n$;
(в) $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$;
(г) $\mathbb{C}P^n$;
(д) $\mathbb{R}P^n$, когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

2. Докажите, что если X является надстройкой, $X = \Sigma Y$, то в когомологиях X умножение тривиально.
(Указание: покажите, что в случае $X = \Sigma Y$ диагональное вложение $X \to X \wedge X = X \times X / X \vee X$ гомотопно отображению в точку.)

Утверждение последней задачи доказывает, наконец-то, что пространства $S^m \times S^n$ и $S^m \vee S^n \vee S^{m+n}$, хотя и имеют изоморфные (ко)гомологии, не являются гомотопически эквивалентными. А именно, они отличаются умножением в когомологиях: в первом из них произведение m-мерной и n-мерной образующих дает $m+n$-мерную образующую, во втором пространстве умножение тривиально).

Пусть $X \subset \mathbb{C}P^n$ — комплексное k-мерное подмногообразие (возможно, особое). Тогда оно задает класс гомологий $[X] \in H_{2k}(\mathbb{C}P^n)$. Поскольку группа $H_{2k}(\mathbb{C}P^n)$ изоморфна $\mathbb{Z}$, мы имеем $[X] = d\,[\mathbb{C}P^k]$ для некоторого натурального d. Число d называется *степенью* подмногообразия X. Геометрически, степень — число точек пересечения многообразия с проективным подпространством дополнительной размерности, находящемся в общем положении.

3. Найдите степень алгебраической комплексной кривой, задаваемой однородным уравнением степени d в $\mathbb{C}P^2$. Выведите отсюда **теорему Безу**: *у системы уравнений*

$$f(x,y) = 0, \qquad g(x,y) = 0,$$

где f и g — многочлены от двух переменных степеней не выше m и n, соответственно, с общими коэффициентами, имеется ровно $m\,n$ решений.

Комплексный грассманиан $G^{\mathbb{C}}_{2,4}$ образован проективными прямыми в проективном пространстве $\mathbb{C}P^3$. У него имеется естественное клеточное разбиение Шуберта (см. задачи семинара VI), состоящее из 6 клеток. В комплексном случае все клетки имеют четную размерность, поэтому их классы образуют аддитивный базис (ко)гомологий.

4. Составьте таблицу умножения в когомологиях $G^{\mathbb{C}}_{2,4}$ в базисе циклов Шуберта.

5. Вычислите индекс 4-кратного самопересечения σ_1^4 цикла Шуберта комплексной коразмерности 1. Ответьте на следующий вопрос исчислительной проективной геометрии: сколько имеется проективных прямых в $\mathbb{C}P^3$, пересекающих четыре данные, находящиеся в общем положении?

Ведение в алгебраическую топологию
Задачи семинара X, 10.12.2020

Множество $\pi_3(S^2)$ классов гомотопий непрерывных отображений $f : S^3 \to S^2$ изоморфно множеству $\mathbb{Z}$ целых чисел. Изоморфизм задается целочисленным инвариантом, называемым *инвариантом Хопфа.* Геометрически он определяется как индекс зацепления $\mathrm{lk}(f^{-1}(a), f^{-1}(b))$ двух общих слоев отображения (чтобы применить это определение, нужно прогомотопировать отображение f в гладкое и выбрать два его произвольных некритических значения).

Мы хотим дать интерпретацию инварианта Хопфа в терминах умножения в когомологиях некоторого пространства. А именно, определим X как результат приклейки к S^2 четырехмерной клетки посредством заданного отображения $f : S^3 \to S^2$, где S^3 рассматривается как граница 4-мерного шара. У пространства X имеется клеточное разбиение, содержащее по одной клетке в размерностях 0, 2 и 4. Отсюда следует, что аддитивно (ко)гомологии пространства X не зависят от выбора отображения f: $H_2(X) \simeq H^2(X) \simeq H_4(X) \simeq H^4(X) \simeq \mathbb{Z}$. Обозначим образующие соответствующих групп через $u \in H^2(X)$, $v \in H^4(X)$. Тогда элемент u^2 лежит в группе $H^4(X)$, и потому пропорционален образующей v.

1. Докажите, что $u^2 = h\,v$, где h — инвариант Хопфа.

Из двойственности Пуанкаре вытекает, что пространство X может быть многообразием только если $h = \pm 1$. В этом случае мы получаем $X = \mathbb{C}P^2$ (с комплексной ориентацией или обращенной, соответственно). Во всех остальных случаях X не может быть многообразием. Таким образом, в задаче речь идет об умножении в когомологиях некоторого пространства, которое не является многообразием.

Когомологической длиной $\mathrm{len}(X)$ (связного) пространства X называется минимального k, такое, что найдется k классов когомологий положительной градуировки, произведение которых отлично от нуля (для какого-нибудь кольца коэффициентов). *Категорией Люстерника-Шнирельмана* $\mathrm{Cat}(X)$ называется минимальное k, такое что пространсто X может быть покрыто k стягиваемыми подпространствами. Имеется *неравенство Люстерника-Шнирельмана* (доказательсто которого обманчиво тривиально)

$$\mathrm{Cat}(X) \geq \mathrm{len}(X) + 1.$$

2. Определите минимальное количество карт, которые должен содержать произвольный атлас для следующих многообразий:
   (а) S^n;
   (б) T^2;
   (в) $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{R}P^n$.
   Докажите точность неравнества Люстерника-Шнирельмана во всех перечисленных случаях.

Ведение в алгебраическую топологию

Задачи семинара XI, 17.12.2020

1. Предъявите функции Морса (с по-возможности небольшим числом критических точек) на следующих многообразиях. Определите критические точки и их индексы Морса:
   (а) S^n;
   (б) T^2;
   (в) S_g — сфера с g ручками;
   (г) $S^m \times S^n$;
   (д) T^n;
   (е) $\mathbb{R}P^n$;
   (ж) $\mathbb{C}P^n$.

2. (а) Найдите критические точки их индексы Морса у функции $f = |x|^2 + |y|^2$ на *кривой Ферма* - вещественно двумерной поверхности в $\mathbb{C}^2$, задаваемой комплексным уравнением $x^n + y^n = 1$.
   (б) Кривая Ферма некомпактна, а рассматриваемая функция на ней неограничена. Докажите, что фукнция $\frac{f}{1+f}$ продолжается на замыкание кривой Ферма в комплексной проективной плоскости. Изучая критические точки этого продолжения, найдите эйлерову характеристику и род двумерной поверхности, полученной замыканием кривой Ферма.

3. (В.И. Арнольд, Математический тривиум.) Сколько максимумов, минимумов, и седловых точек имеется у функции $x^4+y^4+z^4+u^4+v^4$ на поверхности, задаваемой уравнениями $x+y+\cdots+v = 0$, $x^2 + y^2 + \cdots + v^2 = 1$, $x^3 + y^3 + \cdots + v^3 = C$?