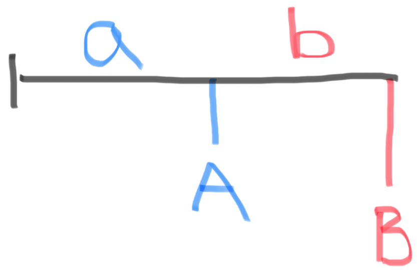
# Задачи

**Василий Козлов:**

1. Докажите, что множество решений игры по Нейману-Моргенштерну содержит C-ядро.

2. Как «правильно» распределить расходы за обслуживание трассы авиакомпаниями A и B, где самолет A взлетает на метке с его именем, самолет B на метке B(летают одинаковое количество раз)(стоимость обслуживания первого участка a, второго b см. Рисунок) .




**Василий Короленков:**

1. Приведите набросок доказательства того, что алгоритм Гейла-Шепли работает (т.е. что он всегда заканчивает работу и что в результате образуется стабильный матчинг)

2. Докажите, что в результате алгоритма Гейла-Шепли, где предложения делают мужчины образуется матчинг, лучший из всех возможных для мужчин и худший из всех возможных для женщин

3. Пусть в результате работы алгоритма Гейла-Шепли с предложениями от мужчин и предложениями от женщин получился один и тот же матчинг. Возможны ли другие стабильные матчинги? Ответ обоснуйте.

4. Приведите пример, когда любой одной девушке невыгодно манипулирование, однако существует коалиция, которой манипулирование выгодно.

5. * Пусть студенты a, b, c, d, e, f, g, h живут в комнатах под номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 соответственно и вдруг решили переселиться таким образом, чтобы никто из них не стал жить хуже. Придумайте алгоритм, позволяющий это сделать, и примените его в том случае, если предпочтения студентов выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}
a: 3 \succ 1 \succ 7 \succ 8 \succ 5 \succ 2 \succ 4 \succ 6 \\
b: 5 \succ 1 \succ 8 \succ 7 \succ 6 \succ 2 \succ 3 \succ 4 \\
c: 1 \succ 3 \succ 7 \succ 2 \succ 6 \succ 5 \succ 8 \succ 4 \\
d: 7 \succ 8 \succ 3 \succ 1 \succ 5 \succ 6 \succ 4 \succ 2 \\
e: 8 \succ 5 \succ 7 \succ 1 \succ 6 \succ 3 \succ 4 \succ 2 \\
f: 2 \succ 6 \succ 5 \succ 4 \succ 1 \succ 8 \succ 3 \succ 7 \\
g: 1 \succ 3 \succ 5 \succ 6 \succ 8 \succ 7 \succ 2 \succ 4 \\
h: 3 \succ 5 \succ 8 \succ 1 \succ 2 \succ 7 \succ 4 \succ 6
\end{gathered}$$

**Денисов Кирилл:**

1. Докажите, что множества $V(K)$ - выпуклые, а также проверьте свойство супераддитивности (если коалиции $K$ и $K'$ не пересекаются, то $V(K \cup K') \supset V(K) \times V(K')$).

2. Имеются три фирмы. Первая фирма может выпускать товары $D_1$ в количестве 900 единиц, вторая — товары $D_1$ в количестве 700 единиц, а третья — товары $D_2$ в количестве 1000 единиц. Товары $D_1$ и $D_2$ продаются только комплектами: одна единица товара $D_1$ и одна единица товара $D_2$. Единица обоих товаров стоит 1 \$. Прогнозируется спрос на 1000 комплектов. Определите выигрыши всех коалиций.

**Федоров Михаил: Задачи - Лекция 22, Ядра коалиционных игр**
Рассмотрим игру "олигархия". Пусть $N$ — множество игроков. Рассмотрим трансферабельную коалиционную игру. Для каждой коалиции $K \subset N$ задана "ценность коалиции" $v(K)$. Для фиксированного $S \subset N$ рассмотрим

$$v(K) = \begin{cases} 1, \text{ если } S \subset K \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

1. Проверьте, что такая игра выпукла (супермодулярна).

2. Найдите ядро этой игры.

3. (*Марьяж*) Пусть $N = M \sqcup N$. Множество $M$ — мужчины, множество $W$ — женщины. Для каждого игрока есть функция полезности $u_i$ на множестве потенциальных партнеров. Исход игры — это некоторая биекция (паросочетание) $\mu\colon M' \to W'$, для $M' \subset M$ и $W' \subset W$. Выигрыши игроков равны

$$x_i = \begin{cases} u_i(\mu(i)), \text{ если } i \in M' \\ u_i(\mu^{-1}(i)), \text{ если } i \in W' \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

   Рассмотрим семейство коалиций $\mathcal{F}$, состоящее из всех пар $(i, j)$, где $i \in M$ и $j \in W$. (А так же, конечно же, из множеств $\{i\}$ и $N$). Проверьте, что это семейство коалиций стабильно.

4. Пусть участники игры расположены в вершинах дерева $T$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$, состоящее из всех поддеревьев $T$ (конечно же связных; более точно мы рассматриваем множества их вершин). Проверьте, что $\mathcal{F}$ — стабильное семейство.

**Мирошниченко Лена: Лекция 23 Вектор Шепли**

1. Четыре акционера имеют следующее количество акций: $10, 20, 30$ и $40$ соответственно. Любое решение утверждается акционерами, имеющими в сумме большинство акций ($> 50$ штук). Это решение считается выигрышем, равным 1. Поэтому данная ситуация может рассматриваться как простая игра четырех игроков, в которой выигрывающими коалициями являются следующие: $\{2; 4\}, \{3; 4\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{2; 3; 4\}, \{1; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}$. Найти вектор Шепли для данной игры.

2. («Джаз-оркестр») Директор клуба обещает 100 руб. певцу S, пианисту P и ударнику D за совместное выступление. Дуэт певца и пианиста он оценивает в 80 руб., ударника и пианиста в 65 руб., певца и ударника в 50 руб., один пианист зарабатывает 30 руб., певец ˘20 руб., ударник один ничего не может заработать (в каждом из случаев делёж денег между выступающими не зафиксирован, то есть делить они их могут как угодно). Обозначая цифрами $1, 2, 3$, игроков $S, P$ и $D$ соответственно, получаем кооперативную игру $(N, v)$. Найдите вектор Шепли данной игры.

3. («Помещик и батраки») У нас есть помещик (далее он будет обозначен игроком 0) и $n-1$ батрак. Помещик, наняв $k$ батраков получает от сбора урожая доход $f(k)$ – монотонно возрастающая функция), часть из которого (никаким образом не фиксированная, это разделение между батраками и помещиком может быть любым) уходит к батракам (не обязательно всем поровну, разделение между ними также может быть любым). Батраки не могут получить доход сами по себе. Тогда у нас получается игра с побочными платежами. Найти вектор Шепли для данной игры, если $f(k)$ равно $a)k^2;\ b)2k-1$.

4. Доказать теорему Шепли про вектор его же: существует и единственна функция, удовлетворяющая 4-м аксиомам вектора Шепли (см. в презентации или в лекции 23 Данилова)

**Галяутдинов Дамир**

1. Есть золотой песок и три пирата, но нет весов. Предпочтения пиратов субъективны (действительно равные кучи могут казаться пирату неравными). Но предпочтения стабильны: если пират считал две кучи равными, и видит, что к первой досыпали песок, то он будет считать первую кучу большей. Каждый пират может делить кучу песка на равные кучи, сравнивать несколько куч, отсыпать из большей кучи песок так, чтобы она сравнялась с меньшей. Предложите конечный механизм справедливого дележа, при котором у пиратов не было бы зависти (каждый считал бы, что его часть не меньше, чем у других).

2. Есть три брата и куча рутинной работы по дому, определенная мамой. Здесь работа — антиблаго. Придумайте процедуру дележа, при которой ни один брат не завидовал бы ни одному другому. Зависть появляется, если брат считает, что у другого работы меньше, чем у него самого. Уточнения: Мнения братьев субъективны (т.е. даже дележ, где каждый получает ровно по одной третьей работы, может вызывать зависть у каждого брата). Мнения братьев рациональны (часть меньше целого, транзитивность). Каждый брат умеет:
1.делить работу на любое количество равных (по своему мнению) частей;
2.сравнивать объемы работ (по своему мнению);
3.при наличии двух неравных объемов работ — от большего объема работ отделять часть так, чтобы он сравнялся с меньшим.

**Степан Шахкаламов : KKMS type theorems with boundary conditions**

1. Выведите следующую формулировку KKMS-теоремы из доказанной выше: Пусть $\mathcal{K}$ – набор всех непустых подмножеств $I_{k+1}$, $\{C_\sigma, \sigma \in \mathcal{K}\}$ – покрытие $k$-мерного симплекса $\Delta^k$, такое что $\forall J \subset I_{k+1}$ соответствующий

симплекс $\Delta_J$ покрыт набором $\{C_\sigma, \sigma \in J\}$. Тогда существует подмножество $D \subset \mathcal{K}$, такое что $\bigcap_{\sigma\in} C_\sigma \neq \emptyset$, причем $D$ удовлетворяет следующему условию: на $D$ существует неорицательная весовая функция такая, что для любого $i \in I_{k+1}$ сумма весов подмножеств, содержащих $i$ равна единице.

2. Пусть множество $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_9\}$ точек из $\mathbb{R}^3$ задано следующем образом: точки $v_1, v_2, \ldots, v_8$ – это вершины единичного куба, а точка $v_9 = (0.5, 0.5, k)$. Найдите все такие $k$, при которых существует сбалансированное относительно $V$ подмножество мощности не более 3.

3. Пусть $V$ – множество вершин октаэдра, то есть множество точек $\pm e_i, i = 1, 2, 3$, $I = \{\pm1, \pm2, \pm3\}$. Докажите, что сумма элементов любого сбалансированного относительно $V$ подмножества равна 0.

**Глеб Красилич : Структура множеств равновесий Нэша**

1. Пусть $u_i$ - функция выигрыша смешанной стратегии $i$-ого игрока, $x \in \Theta$ - профиль смешанной стратегии, $e_i^h$ - смешанная стратегия игрока $i$, соответствующая чистой стратегии $h$ (игрок выбирает $h$ с вероятностью 1).

   Покажите, что $u_i(x) - u_i(e_i^h, x_{-i})$ можно представить в виде многочлена, если рассматривать профиль $x$ как вектор в $\mathbb{R}^m$.

2. **Определение 1** *Подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется полуалгебраическим множеством, если оно удовлетворяет некоторой системе полиномиальных уравнений и неравенств ($P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $Q(x_1, \ldots, x_n) > 0$ и так далее).*

   **Теорема 1** *Всякое полуалгебраическое множество $S \subset \mathbb{R}^n$ представимо в виде дизъюнктивного объединения конечного числа множеств $C_1, \ldots, C_p$, причём каждое $C_i$ гомеоморфно некоторому открытому гиперкубу $(0,1)^{d_i}$ ($d_i \leq n$, $(0,1)^0$ - точка).*

   **Утверждение 1** *Множество равновесий Нэша $\Theta^{NE}$ любой конечной смешанной игры может быть также записано как*

   $$\Theta^{NE} = \{x \in \Theta \mid \forall i \in I \; \forall h \in S_i \; (u_i(x) - u(e_i^h, x_{-i}) \geq 0)\}$$

   *где $I$ - множество игроков, а $S_i$ - множество чистых стратегий игрока $i$.*

   *В частности, $\Theta^{NE}$ является полуалгебраическим множеством (следует из задачи 1).*

   Пользуясь теоремой 1 и утверждением 1, докажите теорему о компонентах Нэша: множество равновесий Нэша $\Theta^{NE}$ представляется в виде дизъюнктивного объединения конечного числа замкнутых связных множеств.

3. Напоминание о двух инвариантных преобразованиях игр.

   Пусть $G = (I, S, \pi)$ - конечная игра с функцией выигрыша $\pi$ (функции выигрыша отдельных игроков будем обозначать $\pi_i$). Получим новую игру $G'$, произведя преобразование функций выигрыша:

$$\pi_i'(s) = \lambda_i \pi_i(s) + \mu_i$$

   Иными словами, мы зафиксировали для каждого игрока $i \in I$ некоторое аффинное преобразование, а затем переменили его к функции выигрыша этого игрока. Такие преобразования называются преобразованиями первого типа.

   Рассмотрим другой вид преобразований. Для каждого игрока $i \in I$ зафиксируем профиль $\tilde{s} \in S$ и число $v_i \in \mathbb{R}$. Определим новые функции выигрыша следующим образом: $\pi_i'(s) = \pi_i(s) + v_i$ если $s_{-i} = \tilde{s}_{-i}$, и $\pi_i'(s) = \pi_i(s)$ в противном случае. Иными словами, для каждого игрока $i$ мы фиксируем профиль стратегий других игроков и прибавляем некоторую константу к функции выигрыша $i$ только тогда, когда другие игроки придерживаются зафиксированного выше профиля. Такие преобразования называются преобразованиями второго типа.

   Преобразования и первого, и второго типа являются инвариантными: отношение доминирования стратегий, соответствие наилучших ответов и множество равновесий Нэша для игр $G$ и $G = (I, S, \pi')$ совпадают. Следовательно, данные преобразования можно использовать для упрощения вычислений.

   Рассмотрим игру двух игроков, заданную парой матриц-выигрышей $(A, B)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

   Используя преобразования игр первого и второго типов, приведите матрицы выигрышей игроков к виду

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   и найдите равновесия Нэша для игры $G'$. Убедитесь, что вычисления сильно упростились.

### Артемий Павлюков : Теорема Какутани

1. Показать, что если X - компакт, а F - замкнутое соответствие из X в X с непустым образом, то существует точка x, которая принадлежит выпуклой оболочке F(x).

2. Показать существенность условий теоремы Какутани (выпуклость, компактность X, выпуклость F).

### Владимир Уткин: О теореме о неподвижной точки, теореме KKMS и ядре сбалансированных игр

1. Пусть общество состоит из 3 индивидов. Приведите все сбалансированные наборы коалиций.

2. Приведите экономическую интерпретацию KKMS.

3. Докажите большую теорему ККМ, используя KKMS.

**Следствие 5 (большая теорема ККМ).** *Пусть $S = \{1, \ldots, m\}$. В симплексе $\Sigma(S)$ рассмотрим $m$ замкнутых множеств $F_1, \ldots, F_m$, обладающих следующим свойством:*

$$\Sigma(A) \subset \bigcup_{i \in A} F_i \quad \forall A \subset S. \tag{8}$$

*Тогда они имеют по крайней мере одну общую точку*

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_i \neq \varnothing.$$

Подсказка: Экланд И. "Элементы экономической экономики"(1983, Мир)

**Корнеев Илья: Задача о разборчивой невесте**

1. Выведите для задачи о разборчивой невесте формулу для вероятности победы в момент $t$ при условии, что $t$-ый жених лучше всех предыдущих

$$g_t = \frac{t}{n}$$

с помощью математической индукции с конца.

2. Выведите для задачи о разборчивой невесте формулу для вероятности победы при условии, что невеста пропустит $t$ первых кандидатов и дальше (начиная с шага $t+1$) будет действовать оптимально

$$h_t = \frac{t}{n} \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

с помощью математической индукции с конца.

3. Пусть невеста выбирает одного из m лучших, неважно, какого. $h_t$ — вероятность победы при условии, что невеста пропустит $t$ первых кандидатов и дальше (начиная с шага $t+1$) будет действовать оптимально, $g_t(k)$ – вероятность победы, если принцесса остановит свой выбор на $t$-м претенденте при условии, что он является $k$-м по качеству среди первых $t$. Доказать невозрастание $h_t$ с ростом $t$, неубывание $g_t(k)$ с ростом $t$ и её невозрастание с ростом $k$.

**Исаак Калинкин: Подробнее о равновесии Нэша**

1. Рассмотрим игру двух лиц в нормальной форме, которая задается следующей таблицей платежей:

| | **Лево** | **Право** |
|---|---|---|
| **Вверх** | 1, 1 | 2, 0 |
| **Вниз** | 0, 2 | 2, 2 |

   (a) Найдите в этой игре все равновесия Нэша.

(b) Какие из этих равновесий являются равновесием дрожащей руки?

*Указание.* Попробуйте для каждого равновесия Нэша добавить вероятность отклонения от равновесной смешанной стратегии $\varepsilon > 0$ для одного из игроков, рассчитайте платеж другого игрока при новой смешанной стратегии первого.

2. Рассмотрим модификацию игру двух лиц «орел-решка», которая задается следующей таблицей платежей:

| | **Орел** | **Решка** | **Забрать монету** |
|---|---|---|---|
| **Орел** | $-1, 1$ | $0, 0$ | $-1, 1$ |
| **Решка** | $0, 0$ | $-1, 1$ | $-1, 1$ |

   В этой игре, в отличие от изначальной, у Игрока 2 всегда есть стратегия забрать монету.

   Равновесиями Нэша в данной игре являются ситуации, в которых Игрок 2 использует стратегию «забрать монету» с вероятностью 1, а Игрок 1 — любую смешанную стратегию.

   (a) Покажите, что все равновесия Нэша в данной игре также являются равновесием дрожащей руки.

   (b) Найдите единственное собственное равновесие в этой игре.

3. Рассмотрим игру двух лиц, которая задается следующей таблицей платежей:

| | **Лево** | **Прямо** | **Направо** |
|---|---|---|---|
| **Вверх** | $0, 1$ | $1, 0$ | $0, 0$ |
| **Вниз** | $0, 1$ | $0, 0$ | $1, 0$ |

   (a) Найдите множество профилей, которые являются равновесием Нэша.

   (b) Покажите, что каждый профиль из равновесий Нэша является равновесием дрожащих рук.

   (c) Докажите, что все равновесия дрожащих рук не являются строгими равновесиями дрожащих рук.

### Грачев Денис: Симметричные игры двух игроков

1. Придумайте симметричную игру двух игроков, в которой есть

   (a) 3 симметричных равновесия.

   (b) несимметричные и симметричные равновесия.

   (c) только одно равновесие.

2. Найдите необходимое и достаточное условие на матрицы выплат, чтобы игра была симметричной (для двух игроков).

3. Найдите равновесия к приведенной ниже игре. Приведите данную матрицу выплат к диагональной форме. Найдите равновесия в новой форме.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 2 & 20 \end{pmatrix} = B^T$$

**Матвей Катаев:**

1. Напишите два критерия достаточности, чтобы стратегия была эволюционно стабильной. (Критерии были предложены Мэйнард Смитом и Прайсом)

2. Пусть дана матрица выплат в симметричной игре 2 на 2. В зависимости от знаков $a1 = a_{11} - a_{21}, a2 = a_{22} - a_{12}$, напишите число эволюционно стабильных стратегий в каждом случае.

3. При какой доле ястребов $h$ в игре Ястребы-Голуби равновесие будет устойчивым, если:

   - победитель получает $+30$ очков
   - проигравший получает $+0$ очков
   - цена потери времени на демонстрацию силы будет $-10$
   - цена ранения $-60$