15.12.2020 Дифф. Уравнения

Семинар № 18

(I) Разбор 5-мин. прошлого занятия.

$$y'' + 2y' + y = 2\,\mathrm{sh}\,x = e^{x} - e^{-x}$$

Решение: а) Хар. полином: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0$

$\lambda = -1$ – кратный корень.

ФСР: $y_1(x) = e^{-x}$ $y_2(x) = x e^{-x}$

б). В правой части 2 разных квазимногочлена: e^{x}: $\mu = 1$ – не корень хар. полинома $\Rightarrow$ анзац αe^{x} для частного решения.

$\Rightarrow \alpha e^{x} + 2\alpha e^{x} + \alpha e^{x} = 4\alpha e^{x} = e^{x}$ $\boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$

e^{-x}: $\mu = -1$ – корень кратности $\underline{2}$ $\Rightarrow$ анзац для частного решения: $y_r = \tilde{\alpha}\underline{x^2} e^{-x}$

$y_r' = \tilde{\alpha} e^{-x}(2x - x^2)$

$y_r'' = \tilde{\alpha} e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

Подставляем в ДУ: $\boxed{\tilde{\alpha} = -\frac{1}{2}}$

Частное решение

$$y = \frac{1}{4}e^{x} - \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

в) Общее решение:

$$y = \frac{1}{4}e^{x} - \frac{x^2}{2}e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$y(0) = \frac{1}{4} + C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}$$

$$y'(0) = \frac{1}{4} - C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\boxed{y = \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{4}e^{-x}(1 + 2x - 2x^2)}$

Устойчивость решений систем Диф. У.

Рассмотрим систему дифф. уравнений первого порядка для $x^i(t)$ $1 \le i \le n$ с начальными данными в $t = t_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = f^i(t, x^1, \ldots, x^n) & 1 \le i \le n \\ x^i(t_0) = x_0^i & 1 \le i \le n. \end{cases} \quad (\star)$$

Функции $f^i(t, \vec{x})$ непрерывны в $[t_0, +\infty) \times D_n$, где $D_n \subset \mathbb{R}^n$ – область в пространстве $\mathbb{R}^n$ (там x^i живут), и все первые частные производные $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^k}$ тоже непрерывны в $[t_0, +\infty) \times D_n$ $1 \le i, k \le n$.

$\boxed{O}$ Решение $x^i(t, \vec{x}_0)$ системы (A) <u>устойчиво по Ляпунову</u> если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что при $\| \tilde{x}_0 - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| \tilde{x}(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0) \| < \varepsilon$ $\forall t > t_0$

Евклидова норма: $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$.

То есть, при "малом отклонении" начальных данных $x_0^i \to \tilde{x}_0^i$ новое решение задачи Коши $\tilde{x}^i(t, \tilde{x}_0)$ всё время остается в "малой окрестности" старого решения: в $\forall$ момент $t > t_0$ отклоняется от $\{x^i(t, x_0)\}$ не больше, чем на ε.

$\boxed{O}$ Решение $x^i(t, x_0)$ задачи Коши (A) <u>устойчиво асимптотически</u>, если:

а) решение устойчиво по Ляпунову

б) Существует предел:

$$\lim_{t \to \infty} \| \tilde{x}(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0) \| = 0.$$

Дальше ограничимся автоном- =4=
ными системами $f^i(t,\vec{x}) = f^i(\vec{x})$ и, кроме того, будем считать $x^i=0$ — особой точкой векторного поля $\vec{f}$: $f^i(0)=0$.
Тогда $x^i(t)\equiv 0$ — решение (A) (стационарные решения) и мы рассмотрим вопрос об их устойчивости.

Один из простых методов - устойчивость по первому приближению.
Пользуясь непрерывной дифференцируемостью $f^i(x)$ разложим эти функции в ряд Тейлора до 1го порядка в точке $x^i=0$:

$$f^i(x) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{f^i(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^k}\Big|_{\vec{x}=0} x^k + \varphi^i(\vec{x}).$$

Числа $a^i_k = \dfrac{\partial f^i}{\partial x^k}\Big|_{\vec{x}=0}$ — коэфф. линейного приближения.

Справедлива следующая теорема.

$\boxed{\text{Т}}$ а) Пусть <u>вещественные</u> части <u>всех</u> собственных чисел матрицы линейного приближения $A = \|a^i_j\|$ <u>отрицательны</u>, $|\varphi^i(x)| = o(\|x\|)$ $\forall i$,

т.е. $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \dfrac{|\varphi^i(x)|}{\|x\|} = 0$

Тогда нулевое решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}^i = f^i(x) \\ x^i(t_0) = 0 \end{cases}$$

<u>асимптотически устойчиво</u>.

б) (Достаточное условие неустойчивости) Если хотя бы одно собств. число матрицы $A = \|a^i_j\|$ имеет <u>положительную</u> вещественную часть, то нулевое решение <u>неустойчиво</u>.

$\boxed{\text{Замечание 1}}$ Для линейных систем с постоянными коэффициентами пункты а) и б) очевидны, так как все решения имеют множители $e^{\lambda_i t}$, где λ_i – собств. числа A.

в) Если есть собств. числа λ_i матрицы A с нулевой веществ. частью, то требуется дополнительный анализ.

$\boxed{\text{Замечание 2}}$ Эта теорема работает в тех же областях спектра A (т.е. $\mathrm{Re}\,\lambda_i \neq 0$), что и т. Гробмана-Хартмана о топологической эквивалентности фаз. портрета исходной и линеаризованной системы (в окрестности особой точки).

Таким образом, чтобы пользоваться этим методом анализа устойчивости важно уметь выяснять, когда характеристический многочлен матрицы A имеет отрицательные вещественные части всех своих корней.

Это можно сделать не решая уравнение на спектр A — просто из анализа коэффициентов хар. многочлена.

Итак, пусть

$$\det\|\lambda \mathbb{1} - \underline{A}\| = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{p_0} \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

— характеристический многочлен матрицы A, коэффициенты p_i — <u>вещественные</u> <u>числа</u>.

а) Очевидное <u>необходимое</u> условие отрицательности всех $\operatorname{Re}\lambda_i$: <u>все</u> коэфф. p_i должны быть <u>положительны</u> (для $n=1$ и $n=2$ этого, также, и достаточно).

Действительно: λ_i — корни $\Rightarrow$

$$\cancel{p}\,\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_n = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow \quad p_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$$

$$p_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$\vdots$$

$$p_n = (-1)^n \lambda_1 \ldots \lambda_n$$

Отсюда все верно.

б) <u>Критерий</u> Рауса – Гурвица.

По заданному многочлену

$$p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Строим <u>$n \times n$</u> матрицу из его коэффициентов:

$$H = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & \underset{\text{возрастают}}{\underleftarrow{p_{k+2} \; p_{k+1}}} & p_k & \underset{\text{убывают}}{\underrightarrow{p_{k-1} \; p_{k-2}}} & & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & p_n \end{bmatrix}$$

То есть, на диагонали ставим $p_1, p_2, \ldots p_n$. Дальше каждую k-ю строку восстанавливаем из диагонального p_k так: вправо пишем p_{k-1}, p_{k-2} – с понижением номеров на 1 пока не дойдём до крайнего элемента, а влево пишем p_i с $i>k$ – с повышением номера на 1 и тоже до границы матрицы. Если на этом пути номера кончатся до достижения краёв матрицы (то есть, формально надо было бы писать p_i и $i<0$ или p_i с $i>n$), то вместо этих несуществующих p_i пишем 0.

Пример матрицы Гурвица:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0 \qquad n=4$$

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

p_0, $p_{-1}=0$, $p_5=0$

V) Критерий Рауса - Гурвица:

Если все главные диагональные миноры матрицы H $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$ строго >0 то исходный полином имеет отрицат. веществ. часть у всех своих корней. Это необходимое и достаточное условие - критерии.

$$\Delta_1 = H^1_1 \quad \Delta_2 = H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Delta_3 = H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

← номера строк

← номера столбцов минора.

$$H = \begin{pmatrix} h^1_1 & h^1_2 & h^1_3 & \dots \\ h^2_1 & h^2_2 & h^2_3 & \dots \\ h^3_1 & h^3_2 & h^3_3 & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix}$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3

Пример. Когда <u>кубический</u> полином имеет все корни с отрицат. веществ. частью:

$$\lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3 = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Это потребуется на 5 минутке}}$

$$\Delta_1 = p_1 > 0 \quad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} = p_1 p_2 - p_3 > 0$$

$$\Delta_3 = p_3 \cdot \Delta_2 > 0$$

Видно, кстати, что необходимое условие $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ следует из критерия Рауса - Гурвица:

Если $\Delta_2 > 0$ и $p_3 \cdot \Delta_2 > 0 \Rightarrow p_3 > 0$,

если $p_3 > 0$ и $p_1 > 0$ и $p_1 p_2 - p_3 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_2 > 0$.

Итак, у <u>кубического</u> полинома кроме положительности всех коэффициентов требуется ещё только одно условие:

$$p_1 p_2 > p_3.$$

Например, $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+2=0$ имеет решения с положительной веществ. частью, т.к. $p_1=p_2=1$, $p_3=2$ и критерий $p_1p_2>p_3$ нарушен.

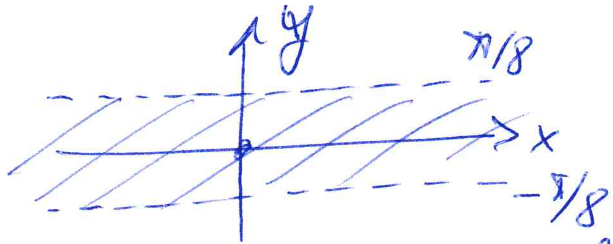
Пример 1.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases}\dot{x}=\sqrt{1+y}-\left(1+\frac{x+y}{2}\right)^2\\ \dot{y}=e^{ax}-tg(4y)-\cos x\end{cases}$$

a – веществ. параметр

В области $D\subset\mathbb{R}^2$ $\quad -\pi/8<y<\pi/8$, $\quad -\infty<x<+\infty$



Точка $(0,0)$ – особая.

правые части удовлетворяют условиям Теоремы. Изучим вопросы:

а) Когда линеаризация дает гомеоморфный фазовый портрет?

б) Когда стационарное решение $x(t)=y(t)\equiv 0$ устойчиво, а когда неустойчиво?

Линеаризуем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \frac{y}{2} \\ \dot{y} = ax - 4y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ a & -4 \end{pmatrix}$$

(нелинейные поправки имеют нужную малость $o(\sqrt{x^2+y^2})$.)

Характеристический полином A:

$$\chi_A = \lambda^2 + 5\lambda + 4 + \frac{a}{2}$$

$$\chi_A = 0 \Rightarrow \lambda_+ = \frac{-5+\sqrt{9-2a}}{2}$$

$$\lambda_- = \frac{-5-\sqrt{9-2a}}{2}$$

– Спектр A.

При $\underline{a=-8}$: $\sqrt{9-2a} = 5 \Rightarrow \lambda_+ = 0$.

Теорема Гробмана-Хартмана не работает. И одновременно, по линейному приближению невозможно судить об устойчивости стационарного решения.

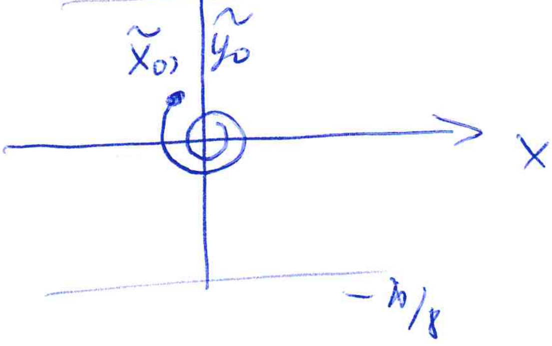
При $a<-8$: $\lambda_+ > 0$, $\lambda_- < 0$ – веществ. корни <u>разных знаков</u>. Фазовый портрет в малой окрестности $(0,0)$ — седловая особая точка и стационарное решение неустойчиво

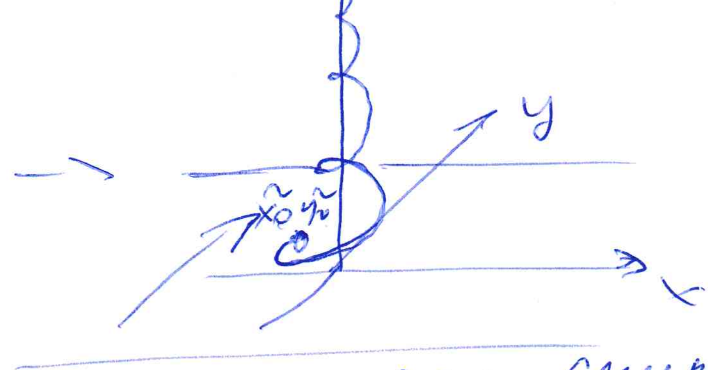
При $a > -8$ вещественные части обоих корней < 0 — решение $x = y = 0$ — асимптотически устойчиво. Но устойчиво "по-разному":

$-8 < a < \frac{9}{2}$ — $\lambda_+ < 0$, $\lambda_- < 0$ — устойчивый узел.

$a = 9/2$ $\lambda_+ = \lambda_- = -\frac{5}{2}$ — вырожд. устойчивый узел

$a > 9/2$ λ_+ и λ_- — комплексно сопряжены с отрицательной веществ. частью: устойчивый фокус





сжимающаяся спираль.

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{y} = -y+3x-x^2 \\ \dot{x} = y-x-x^2 \end{cases}$$

Найти все стационарные решение и исследовать их устойчивость.

Ищем общие нули правых частей:

$$\begin{cases} -y+3x-x^2=0 \\ y-x-x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1=0 \\ x_2=1,\ y_2=2 \end{cases}$$

2 особые точки.

(а) Линеаризуем в окрестности $x_1=y_1=0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y-x \\ \dot{y} = 3x-y \end{cases}$$

Нелинейные остатки: $x^2=o(\sqrt{x^2+y^2})$

$$\Downarrow$$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \chi_A=\lambda^2+2\lambda\underbrace{-2}_{p_2<0}$$

— нарушено необх. условие $\Rightarrow$ есть корни с положит. вещ. частью $\Rightarrow$ стац. решение $x=y=0$ — <u>неустойчиво</u>.

$\lambda_1=\sqrt{3}-1>0$
$\lambda_2=-\sqrt{3}-1<0$ — <u>седло</u>.

(б) Линеаризуем в $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

Сделаем сдвиг: $\begin{cases} x = 1 + \xi \\ y = 2 + \eta \end{cases}$

Линеаризация:

$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta - 3\xi \\ \dot{\eta} = \xi - \eta \end{cases}$ (особая точка $\xi = \eta = 0$).

$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\chi_A = \lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$

$\begin{cases} \lambda_1 = -2 + \sqrt{2} < 0 \\ \lambda_2 = -2 - \sqrt{2} < 0 \end{cases}$

Стационарное решение $\begin{cases} x_2(t) = 1 \\ y_2(t) = 2 \end{cases}$ —

— асимптотически устойчиво.

Особая точка — устойчивый узел.

На 5 минут ($\gtrsim$ 15 мин.)

Дана система:

$$\begin{cases} \dot{x} = tg(z-y) - 2x \\ \dot{y} = 3\sqrt{1+4x} - 3e^{ay} \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$$

a – вещ. параметр.

При каких $a \in \mathbb{R}$ нулевое решение асимптотически устойчиво?

(а) Линеаризовать систему

(б) Выписать набор условий Рауса-Гурвица для хар. полинома

(в) Найти из (б) ограничение на параметр a.