Лекция 9
23 октября 2020 г. 16:17

Закон больших чисел (ЗБЧ).

<u>Сх-ть по вер-ти:</u> (ξ_n), ξ – сл. вел. на $(\Omega, \mathbb{P})$. Говорят, что $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

<u>Упр</u> $(\xi_n), \xi, (\eta_n), \eta$ на $(\Omega, \mathbb{P})$, $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$, то тогда $\xi_n + \eta_n \to \xi + \eta$. В частности, если (a_n) – числовая посл-ть $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \to a$, то $\xi_n + a_n \to \xi + a$.

$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\})$.

① ЗБЧ классический.

Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые сл.вел., такие что $\exists\, C > 0$: $\mathrm{Var}\,\xi_i \leq C$ $\forall i$ (дисперсии равномерно ограничены). Тогда $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k$ удовлетворяет $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

(то есть, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall \varepsilon > 0$.)

<u>Пример</u> $\mathbb{P}(\xi_j = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\xi_j = 0) = \frac{1}{2}$.

S_n = число орлов за первые n бросков.

$\frac{S_n}{n}$ – доля орлов за n бросков. $\longrightarrow \sim \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

$\mathbb{E}S_n = \sum_0^{n-1} \mathbb{E}\xi_k = \frac{n}{2}$. $\quad \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Если ξ_j – iid, то $\mathbb{E}S_n = n\,\mathbb{E}\xi_0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_0$.

<u>Нер-во Чебышёва:</u> Пусть $\eta \geq 0$ – сл. вел. ($\forall \omega$, $\eta(\omega) \geq 0$). Тогда $\mathbb{P}(\eta \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\eta}{\varepsilon}$. $\forall \varepsilon > 0$

ξ – сл. вел., $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \underset{\text{Чеб.}}{\leq} \frac{\overbrace{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}^{\mathrm{Var}\,\xi}}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}\,\xi}{\varepsilon^2}$.

<u>Д-во ЗБЧ</u>

$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq n\varepsilon) \underset{\text{Чеб.}}{\leq} \frac{\mathrm{Var}\,S_n}{n^2\varepsilon^2}$.

$\mathrm{Var}\,S_n \underset{\text{незав.}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\,\xi_k \leq nC$.

$\Rightarrow \leq \frac{Cn}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

② ЗБЧ для МЦ.

<u>Обозначение:</u> Пусть $f : \{1, \ldots, L\} \to \mathbb{R}$, а $p \in \mathcal{P}$. Тогда

$\langle p, f \rangle := \sum_{j=1}^{L} p_j f(j)$ – "действие распр-ия (меры) на ф-цию f".

В частности, если ξ – сл. вел., $p = p_\xi$ (то есть, $p_j = \mathbb{P}(\xi = j)$), тогда $\boxed{\langle p, f \rangle = \mathbb{E}f(\xi)}$.

<u>Напоминание</u> МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – эргодическая, если $\exists!$ стац. состояние π и $\exists\, C > 0$, $0 < \lambda < 1$, т.ч. $\forall\, p^{(0)}$, $|p^{(n)} - \pi|_1 \leq C\lambda^n$. $\forall n$.

<u>Лемма 25</u> Если МЦ эргодична, то $|\mathbb{E}f(\xi_n) - \langle \pi, f \rangle| \leq C\lambda^n$.

<u>Д-во:</u> $\mathbb{E}f(\xi_n) = \langle p^{(n)}, f \rangle = \sum p_i^{(n)} f(i) \Rightarrow$

$|\mathbb{E}f(\xi_n) - \langle \pi, f \rangle| \leq \max_{1 \leq i \leq L} f(i)\, |p^{(n)} - \pi|_1$. ч.т.д.

<u>Теор 26</u> (ЗБЧ). Пусть МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – эргодична, а π обозначает её единственное стац. состояние. Тогда $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$ удовлетворяет

a) $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ $\qquad$ б) $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \langle \pi, f \rangle$.

<u>Замечание</u>

Если $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ – незав., то $f(\xi_1), f(\xi_2), f(\xi_3), \ldots$ – незав.

Если $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ – МЦ, то $f(\xi_1), f(\xi_2), f(\xi_3), \ldots$ – не всегда МЦ.

<u>Пример</u> пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & x = m \\ 0, & x \neq m \end{cases}$ $\quad f(x) = \mathbb{1}_{\{m\}}(x)$

$m \in \{1, \ldots, L\}$.

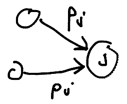
Тогда $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$ = # раз, которое процесс посетил сост. m до времени n.

$\frac{S_n}{n}$ – частота посещения состояния m.

ЗБЧ: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle \pi, f \rangle = \sum \pi_i f(i) = \boxed{\pi_m}$

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – незав. (iid), то p - распр. ξ_s

они обр. МЦ с $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_{k+1} = j \mid \xi_k = i) = \mathbb{P}(\xi_{k+1} = j) = p_j$.



Док-во 35Ч: чтобы вывести (б) из (а) дост. д-ть, что

$$\frac{\mathbb{E} S_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \langle \pi, f \rangle.$$

$$\frac{\mathbb{E} S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\, f(\zeta_k).$$ Кроме того, по Лемме 25, $\mathbb{E} f(\zeta_n) \to \langle \pi, f \rangle$.

Упражнение Пусть (x_n) - числовая посл-ть, $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

тогда $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \to x.$

говорят, что $x_n \to x$ по Чезаро.

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{E} S_n}{n} \to \langle \pi, f \rangle,$$

Остается д-ть пункт (а) $\frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E} S_n}{n} \right| \geqslant \varepsilon \right) = \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E} S_n| \geqslant \varepsilon n \right) \leqslant \frac{\operatorname{Var} S_n}{\varepsilon^2 n^2}.$$

$\operatorname{Var} S_n \neq \sum \operatorname{Var} f(\zeta_k)$, т.к. $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ не незав.

$$\operatorname{Var} S_n = \mathbb{E}\left(S_n - \mathbb{E} S_n \right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(f(\zeta_k) - m_k \right) \right)^2,$$ где

$$\boxed{m_k := \mathbb{E} f(\zeta_k)}$$

$$\operatorname{Var} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\mathbb{E}\left(f(\zeta_k) - m_k \right)^2}_{\operatorname{Var} f(\zeta_k)} + 2 \sum_{0 \le k < l \le n-1} \overbrace{\mathbb{E}\left(f(\zeta_k) - m_k \right)\left(f(\zeta_l) - m_l \right)}^{\operatorname{cov}(f(\zeta_k), f(\zeta_l))}.$$

Лемма 27 $|\operatorname{cov}(f(\zeta_k), f(\zeta_l))| \le C \lambda^{l-k}, \quad \forall\, l > k.$

не зав от l, k, $0 < \lambda < 1$.

"если ζ_k — МЦ, то ζ_k и ζ_l почти незав. при $l \gg k$, если МЦ эргодична".

Пусть $K = \max_{1 \le i \le L} |f(i)| < \infty$. тогда $|f(\zeta_k)| \le K$, $|m_k| \le K$.

Поэтому $\operatorname{Var} f(\zeta_l) \le (2K)^2$. $\Rightarrow$ $$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(f(\zeta_k) - m_k \right)^2}{\varepsilon^2 n^2} \le \frac{(2K)^2 n}{\varepsilon^2 n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$$\left| \frac{\sum_{0 \le k < l \le n-1} \operatorname{cov}(f(\zeta_k), f(\zeta_l))}{\varepsilon^2 n^2} \right| \le \frac{C}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{-\shortparallel-} \lambda^{\overbrace{l-k}^{s}} = \frac{C}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1-s} \lambda^s \le$$

$$\le \frac{C}{\varepsilon^2 n^2}\, n \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s \le \frac{C}{\varepsilon^2 n^{\cancel{2}}} \cancel{n} \frac{1}{1-\lambda} = \frac{C}{\varepsilon^2 (1-\lambda)} \frac{1}{n} \to 0.$$

ч.т.д.

Док-во леммы 27: $\mathrm{cov}(f(\xi_k), f(\xi_\ell)),\ \ell > k.$

$m_k = \mathbb{E} f(\xi_k)$ $\qquad \mathrm{cov}(f(\xi_k), f(\xi_\ell)) = \mathbb{E}\Big[\underbrace{(f(\xi_k) - m_k)}_{a}\underbrace{(f(\xi_\ell) - m_\ell)}_{b}\Big]$

Шаг 1. Обозначим $\widetilde{\mathrm{cov}}(f(\xi_k), f(\xi_\ell)) = \mathbb{E}\Big[\underbrace{(f(\xi_k) - \langle \pi, f\rangle)}_{c}\underbrace{(f(\xi_\ell) - \langle \pi, f\rangle)}_{d}\Big]$

Оценим $\Delta_{k\ell} := |\mathrm{cov}(f(\xi_k), f(\xi_\ell)) - \widetilde{\mathrm{cov}}(f(\xi_k), f(\xi_\ell))|.$

Напоминание: лемма 25 $\Rightarrow$ $|m_k - \langle \pi, f\rangle| \le C\lambda^k.$

$$|\mathbb{E}(ab - cd)| \le |\mathbb{E}(a-c)b| + |\mathbb{E}c(b-d)|$$

$$\Delta_{k\ell} \le |(\langle \pi, f\rangle - m_k)\,\underset{0}{\underline{\mathbb{E}(f(\xi_\ell) - m_\ell)}}| + |\mathbb{E}[(f(\xi_k) - \langle \pi, f\rangle)(m_\ell - \langle \pi, f\rangle)]|$$

$$= 0 + |(m_k - \langle \pi, f\rangle)(m_\ell - \langle \pi, f\rangle)| \underset{\text{л.25}}{\le} \boxed{C\lambda^{k+\ell}} \le \boxed{C\lambda^{\ell-k}}$$

Шаг 2 Оценим $\widetilde{\mathrm{cov}}(f(\xi_k), f(\xi_\ell))$. Рассмотрим ф-цию $g = f - \langle \pi, f\rangle$. Тогда $g(\xi_k) = f(\xi_k) - \langle \pi, f\rangle \Rightarrow$

$\langle \pi, g\rangle = 0.$
$\langle \pi, f\rangle - \langle \pi, f\rangle\langle \pi, 1\rangle$, $\langle \pi, 1\rangle = 1$.

$$\widetilde{\mathrm{cov}}(f(\xi_k), f(\xi_\ell)) = \mathbb{E}\, g(\xi_k) g(\xi_\ell) =$$

$$= \sum_{1 \le a, \ell \le L} g(a) g(b)\, \mathbb{P}(\xi_k = a, \xi_\ell = b) =$$

$$= \sum_{a,b} g(a) g(b)\, \mathbb{P}(\xi_\ell = b \mid \xi_k = a)\, \mathbb{P}(\xi_k = a)$$

Задача Д-ть, что $\|\mathbb{P}(\xi_n = \cdot \mid \xi_0 = b) - \pi\|_1 = \sum_{a=1}^{L} |\mathbb{P}(\xi_n = a \mid \xi_0 = b) - \pi_a| \le$
(лемма 11 + следствие 22). $\qquad \le C\lambda^n \quad \forall n, b.$

$$p^{(n)}_{ba} = (\Pi^n)_{ba}$$

Заметим, что $\mathbb{P}(\xi_\ell = b \mid \xi_k = a) = \mathbb{P}(\xi_{\ell-k} = b \mid \xi_0 = a)$ (однородность). Кроме того,

$$\sum_{a,b} g(a) g(b)\, \pi_b\, \mathbb{P}(\xi_k = a) = 0, \text{ т.к. } \sum_b g(b)\pi_b = \langle \pi, g\rangle = 0.$$

получаем, что

$$\widetilde{\mathrm{cov}}(f(\xi_k), f(\xi_\ell)) = \sum_{a,b} g(a) g(b)\big(\mathbb{P}(\xi_\ell = b \mid \xi_k = a) - \pi_b\big)\mathbb{P}(\xi_k = a)$$

$$\to |\widetilde{\mathrm{cov}}| \le \sum_{a,b} |g(a)||g(b)|\, C\lambda^{\ell-k} \le \underbrace{C[\max_i g(i)]^2 L^2}_{C'}\ \lambda^{\ell-k}.$$

Итого, $|\mathrm{cov}(f(\xi_k), f(\xi_\ell))| \le C\lambda^{\ell-k}$.

Замечание: C' можно выбрать не завис. от L.

ч.т.д.

По следам КР

① $!$ стац. состояния. $\pi(\Pi - \mathrm{Id}) = 0.$ $\quad \sum \pi_i = 1.$

② Проверить, что $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T$ – ЦМ?

1) По опр.: $\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_T = i_T)$. – сложно.

2) Лемма 2: $\xi_0, \dots, \xi_T$ – ЦМ с нач. распр. $p^{(0)}$ и пер. вер-ми $p_n(i,j)$

$\Leftrightarrow$
а) $\mathbb{P}(\xi_0 = i) = p^{(0)}_i$. $\quad$ б) $\mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \xi_0 = i_0) = \mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1})$

в) $\mathbb{P}(\xi_n = i \mid \xi_{n-1} = j) = p_n(j, i)$. $\quad (p_n \ge 0, \ \sum_j p_n(i,j) = 1)$

$\to$ нужно проверить только б), т.к. а), в) выполнены автоматически.

(3) Задача 4:

$\xi_0, \dots, \xi_T$ – МЦ. Верно ли, что $\xi_T, \dots, \xi_0$ – МЦ?

Обозначение: $\mathbb{P}(\xi_n = i_n, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \xi_0 = i_0) := \mathbb{P}(\xi_n, \dots, \xi_0)$.

$$\mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n+1} = i_{n+1}, \dots, \xi_T = i_T) \overset{?}{=} \mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n+1} = i_{n+1}).$$

$$\frac{\mathbb{P}(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_T)}{\mathbb{P}(\xi_{n+1}, \dots, \xi_T)} = \frac{\mathbb{P}(\xi_T \mid \cancel{\xi_{T-1}, \dots, \xi_n})\, \mathbb{P}(\xi_{T-1}, \dots, \xi_n)}{\mathbb{P}(\xi_T \mid \cancel{\xi_{T-1}, \dots, \xi_{n+1}})\, \mathbb{P}(\xi_{T-1}, \dots, \xi_{n+1})} = \dots =$$

$\mathbb{P}(\xi_T \mid \xi_{T-1}, \dots, \xi_0)$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(\xi_T \mid \xi_{T-1})$.

ξ_n

$\mathbb{P}(\xi_T = i_T \mid \xi_{T-1} = i_{T-1}, \dots, \xi_n = i_n) = \mathbb{P}(\xi_T = i_T \mid \xi_{T-1} = i_{T-1}, \dots, \xi_n = i_n, (\xi_{n-1}, \dots, \xi_0) - \text{любые})$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi_{n+1}, \xi_n)}{\mathbb{P}(\xi_{n+1})} = \mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n+1} = i_{n+1}) \Rightarrow \underline{\text{ок}}.$$

Переход. вер-ти!

$$\mathbb{P}(\xi_n = i \mid \xi_{n+1} = j) = \frac{\mathbb{P}(\xi_n = i, \xi_{n+1} = j)}{\mathbb{P}(\xi_{n+1} = j)} = \frac{\mathbb{P}(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i)\, \mathbb{P}(\xi_n = i)}{\mathbb{P}(\xi_{n+1} = j)} =$$

$$\tilde{p}_{T-n}(j, i) = \frac{p_n(i,j)\, p_i^{(n)}}{p_j^{(n+1)}} \text{ — новые переход. вер-ти.}$$

Если $p_n(i,j) = p_{ij}$, то $\tilde{p}_{T-n}(j,i) = \dfrac{p_{ij}\, p_i^{(n)}}{p_j^{(n+1)}}$.

Если $p^{(0)}$ стационарно, то $p_i^{(n)} = p_i^{(0)} = \pi_i$ (ст. распр.)

$$= \boxed{\frac{p_{ij}\, \pi_i}{\pi_j}}$$

(4) Задача 3 из списка от 16.10:

ξ_n – # индивид. в n-ом поколении, $\varphi_n(z) = \mathbb{E} z^{\xi_n}$.

$\xi_{n+1} = \sum_{i=1}^{\xi_n} \eta_n^i$, η_n^i – i.i.d., $\varphi(z) = \mathbb{E} z^{\eta_n^i}$

Д-ть, что $\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ раз}}(z)$

Д-во: $\varphi_{n+1}(z) = \mathbb{E} z^{\xi_{n+1}} = \mathbb{E}\left(z^{\eta_n^1} \cdots z^{\eta_n^{\xi_n}}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(z^{\eta_n^1} \cdots z^{\eta_n^{\xi_n}}\, \mathbb{I}(\xi_n = i)\right) =$

$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{I}(\xi_n = i)$, где $\mathbb{I}_{(\xi_n = i)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \xi_n(\omega) = i \\ 0, & \xi_n(\omega) \neq i \end{cases}$ $= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(z^{\eta_n^1} \cdots z^{\eta_n^i}\, \mathbb{I}(\xi_n = i)\right)$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(z^{\eta_n^1}) \cdots \mathbb{E}(z^{\eta_n^i})\, \mathbb{E}\, \mathbb{I}(\xi_n = i) = \sum_{i=0}^{\infty} [\varphi(z)]^i\, \mathbb{P}(\xi_n = i) = \mathbb{E}[\varphi(z)]^{\xi_n} = \varphi_n(\varphi(z))$$

$\eta_n^1, \dots, \eta_n^i, \xi_n$ – независ.

Итак, $\varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(\varphi(z)) = \dots = \varphi_1(\underbrace{\varphi(\varphi(\dots(z)))}_{n \text{ штук}}) = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n+1 \text{ раз}}(z)$.

$\varphi_1 = \varphi$, $\xi_1 = \eta_0^1$

Ч.т.д.

Некоторые применения МЦ.

① Марков (1913). Пушкин, "Евгений Онегин". 20000 букв

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T$. Каково р-ие ξ_j? ξ_j = а, б, ...

Самая простая возможность: ξ_i – iid. длинный кусок текста

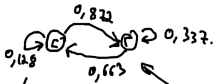
$P(\xi_j = \text{"а"}) = \dfrac{\#\text{ букв "а"}}{\text{длину текста}}$.

Упрощаем:

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T$, $\xi_j \to$ гл. / $\to$ согл. $P(\xi_j = \text{гл.}) = \dots$

Дисперсия ξ_j: согл. биномиальн. статистики расп-$\}$ плохое согласие.

Более сложная модель: $\xi_0, \xi_1, \dots$ – МЦ.



$\pi_г = 0{,}432$

$\pi_с = 0{,}568$.

Дисперсия, вычисленная согл. ≈ статистическую дисперсию.

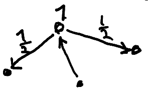
100000 Аксаков: $\underline{\pi_г = 0{,}449}$, $p_{гс} = 0{,}365$

---

② Клод Шеннон, 1948.

③ PageRank (Google).

$\ell(1) = 2$.



L – общее число веб-сайтов

$\{1, \dots, L\}$ i – номер сайта $\ell(i)$ – число ссылок со страницы i.

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\ell(i)}, & \text{если } \ell(i) \neq 0, \text{ и } i \to j \\ \frac{1}{L}, & \text{если } \ell(i) = 0 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Граф не всегда связен!

$\Rightarrow$ МЦ не эргодична.

Пусть $p_{ij} = (1-\alpha)\hat{p}_{ij} + \dfrac{\alpha}{L}$, $(\alpha \approx 0{,}15)$

МПВ эргодична $(p_{ij} > 0 \ \forall i,j) \Rightarrow$ МЦ эргодична $\Rightarrow$

$\exists!$ стац. распр-ие π.

Страница i находится в выдаче раньше, чем j, если $\boxed{\pi_i > \pi_j}$.

$\Pi = (p_{ij})$ $\pi = \pi\Pi$.

$p^{(0)}$ – произв. $p^{(n)} = p^{(n-1)}\Pi$ $p^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{эрг. теор.}\Rightarrow} \pi$.

---

④ **Метод Markov Chain Monte Carlo**

S – строка $S = (j_0, j_1, j_2, j_3, \dots, j_T)$, $i_j \in$ латинский алфавит.

σ_* – перестановка латинского алфавита. Известно $\sigma_*(S)$.

$$\begin{matrix} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & a & c \end{matrix}$$

Надо найти S. число букв = 27 (включая пробел)

пер-ок = $27! \approx 10^{28}$.

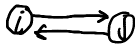
Алгоритм Метрополиса-Хастингса

__Задача__ Пусть цепь МЦ с вер-ми перехода (p_{ij}) и $\pi \in P$ удовлетворяет $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ $\forall i,j$.

Тогда π – стационарное состояние.

Пусть дана (однородная) МЦ с вер-ми перехода (p_{ij}), т.ч.

$p_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow p_{ji} \neq 0$, $\forall i,j$.

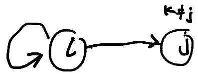


Пусть $\pi \in P$, т.ч. $\pi_j > 0$, $\forall j$.

Хотим модифицировать p_{ij} так, чтобы π стало стац. состоянием новой МЦ.

Пусть q_{ij} переходные вер-ти модиф. МЦ. Пусть

$$q_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} p_{ij}, & i \neq j \\ 1 - \sum\limits_{k \neq j} q_{ik}, & i = j, \end{cases} \quad 0 < \alpha_{ij} \leq 1.$$



Подберем α_{ij} таким образом, чтобы были выполнены условия задачи:

$$\pi_i \alpha_{ij} p_{ij} = \pi_j \alpha_{ji} p_{ji} \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i p_{ij}}}$$

Выберем α_{ij} максимально возможными:

$$\boxed{\alpha_{ij} = \min\left(1, \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i p_{ij}}\right)}$$

<1

Если $p_{ij} = p_{ji}$, то $\alpha_{ij} = \min\left(1, \frac{\pi_j}{\pi_i}\right)$

"Топология" МЦ почти сохранилась.

Замечание 28 Достаточно знать π с точностью до умножения на константу. $\boxed{c\pi}$

Замечание 29 Если МЦ (p_{ij}) эргодич., то (q_{ij}) - тоже.
для новой МЦ $p^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$.

Зачем максимизировать α_{ij}: $\alpha_{ij} \to \max \Rightarrow q_{ij} \to \max \Rightarrow \lambda \to \min$, $\lambda = \left(1 - \min_{i,j} q_{ij}^{(s)}\right)^{a}$, $0 < \lambda < 1$ из эргод. теоремы $c\lambda^n$

$\Rightarrow$ скорость сх-ти $\to \max$.

Применение к расшифровке текстов

S = "Enter HAMLTET HAMTOBE..." σ_* - искомая пер-ка.

Дано $\sigma_*(S)$. Вычислить σ_*: тогда $S = (\sigma_*^{-1}(i_0), \sigma_*^{-1}(i_1), \ldots)$.

$(i_0, i_1, \ldots, i_T)$ ab i = "a", j = "b".

Идея: текст ~ МЦ. r_{ij} - вер-ть ij

$\mathbb{P}(i_0, i_1, \ldots, i_T) = r_{i_0 i_1} \cdots r_{i_{T-1} i_T}$

$\mathbb{P}(\sigma^{-1}(i_0), \ldots, \sigma^{-1}(i_T))$ - достаточно велико.

σ_* (Хотим подобрать σ так, чтобы) была максимальна.

$r_{\sigma^{-1}(i_0)\sigma^{-1}(i_1)} \cdots r_{\sigma^{-1}(i_{T-1})\sigma^{-1}(i_T)}$

ov ob

КОРОВА $\mathbb{P}(0) = \frac{1}{3}$

$p_{ko} = 1$, $p_{ki} = 0 \; \forall i \neq 0$

$p_{op} = p_{oB} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(OPQ) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$

$\boxed{\text{abcgk mfs}}$

$\boxed{\text{Лекция } 1.12.2020}$

$i_0, \ldots, i_T$ - фикс., σ - меняем.

$27!$ Пусть $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_\sigma)_\sigma$, где

$\hat{\pi}_\sigma = \mathbb{P}(\sigma^{-1}(i_0), \ldots, \sigma^{-1}(i_T))$.

Построим МЦ, в качестве состояний которой будут перестановки, т.е. $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$

$\pi = \frac{\hat{\pi}}{Z}$ - её стац. состоянием, и т.д. она эргодична, где $Z = \sum_\sigma \hat{\pi}_\sigma$ ~ $27!$ слагаемых.

$\mathbb{P}(\sigma_m = \sigma_*) \xrightarrow{m\to\infty} \pi_{\sigma_*}$ по эргод. теореме

$\pi_{\sigma_*} = \max_\sigma \pi_\sigma$.

При $m \gg 1$

$\mathbb{P}(\sigma_m \neq \sigma_*, \sigma_{m+1} \neq \sigma_*, \sigma_{m+2} \neq \sigma_*, \ldots \sigma_{m+k} = \sigma_*)$ - мала, если k дост. велико.

Как построить МЦ $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$?

Алгоритм:

σ_0 - произвольно. Пусть σ_m - известно, построим σ_{m+1}.

Пусть $\hat{\sigma}_{m+1} = t \circ \sigma_m$, где t - случайная транспозиция.

Пусть $\sigma_{m+1} = \hat{\sigma}_{m+1}$ с вер-тью $\min\left(1, \frac{\hat{\pi}_{\hat{\sigma}_{m+1}}}{\hat{\pi}_{\sigma_m}}\right)$, $\sigma_{m+1} = \sigma_m$ с вер-тью $1 - *$.

"$\sigma_m \to \sigma_*$".

Почему эта МЦ имеет стац. состояние π и почему она эргодична? Потому что это алгоритм М-Х.

Рассм. МЦ на мн-ве перест. с перех. вер-ми

тожд. пер-ка: тоже транспозиция

$\forall \sigma, \sigma'$ $p_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} 0, & \sigma' \text{ не получается из } \sigma \text{ транспозицией} \\ \frac{1}{}, & \text{в противном случае} \end{cases}$

$\boxed{p_{\sigma\sigma'} = p_{\sigma'\sigma}}$

транспозиций

З считать не нужно, см. Замечание 28.

$$q_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} \alpha_{\sigma\sigma'} p_{\sigma\sigma'}; \\ 1 - \sum_{\sigma''} q_{\sigma\sigma''}, \ \sigma = \sigma', \end{cases} \quad \alpha_{\sigma\sigma'} = \min\left(1, \frac{\pi_{\sigma'}}{\pi_\sigma}\right)$$

$$\min\left(1, \frac{\hat{\pi}_{\sigma'}}{\hat{\pi}_\sigma}\right)$$

Новая МЦ имеет стац. состояние π.

<u>Задача</u> МЦ с пер. вер-ми $p_{\sigma\sigma'}$ – эргодична. Следовательно, МЦ с пер. вер-ми $q_{\sigma\sigma'}$ – эргодична. (см. Замечание 29).

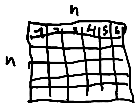
σ_{100}

<u>Некоторые другие применения М-Х.</u>

$\pi \in \mathcal{P}$ $\quad f: \{1, \dots, L\} \to \mathbb{R}$.

$$\langle \pi, f \rangle = \sum_{i=1}^{L} \pi_i f(i). \quad \text{— иногда очень сложный счёт.}$$

<u>Пример</u>



$1, \dots, n$

лат. квадраты

π – равн. распр-ие на мн-ве лат. квадратов.

$\pi_i = \dfrac{1}{L_n}$, L_n – число л.кв. со стороной n, фикс.

не известно для $n \gg 1$.

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ – эрг. МЦ с стац. сост. π. (алг. М-Х)

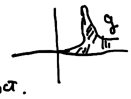
ЗБЧ:

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \to \langle \pi, f \rangle}$$

$\boxed{\text{Замечание 28}}$

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx$, $g \geq 0$, инт-ма, f – огр.

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overbrace{\mathbb{1}_D(x)}^{g} dx$$



$n > 1$ – плохо

$\cancel{\{1, \dots, L\}}$ континуальное мн-во сост. $\mathbb{R}^n$.

$\xi_0, \xi_1, \dots$ $\quad \pi(x) = \dfrac{g(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} g(x)}$ $\quad \int_{\mathbb{R}^n} \pi(x)\,dx = 1$, $\pi \geq 0$. $\Rightarrow \pi$ – распр-ие

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \xrightarrow[\text{ЗБЧ}]{n\to\infty} \langle \pi, f \rangle = \int \pi(x) f(x)\,dx = \frac{\int g(x) f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}.$$

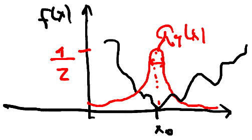
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – имеет глобальный минимум $f^{min} \in \mathbb{R}$.

x_{min}: $f(x_{min}) = f^{min}$. ?

У f могут быть локальные минимумы. f м.б. не регулярны.

Пусть $\pi_T(x) = \dfrac{e^{-\frac{f(x)}{T}}}{\int e^{-\frac{f(x)}{T}} dx} \quad \int e^{-\frac{f(x)}{T}} dx = Z$. Тогда $x_{min} \sim \int_{\mathbb{R}^n} x \, \pi_T(x)\, dx$, при $T \ll 1$.

Для простоты $f(x_0) = 0$, $f(x) > 0$ $\forall x \neq x_0$. Тогда $x_{min} = x_0$



P_{xy}

$P_x(Y)$, $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

$\int_{\mathbb{R}^n} P_x(dy) = 1$.

$\int \pi_T(x)\,dx = 1$

δ-образный пер-ть

$$\boxed{\int x \, \pi_T(x)\, dx \xrightarrow{T \to 0} x_0}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i}_{\text{М-Х.}} \xrightarrow{n\to\infty} \langle \pi_T, x \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} x \, \pi_T(x)\, dx.$$

Теорема Перрона-Фробениуса

15 декабря 2020 г.
14:40

Лекция в пт. 18.12 в 16.20-17.50

(1) ← (2) → (3) Из эргод. ПЛВ-ие эрг.

Обозначения на сегодня!
все вектора — вектора-столбцы
t – транспонирование

Перрон 1907.

Теорема (Перрона-Фробениуса) 30.

Пусть $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le L}$, $L\ge 1$ – положительная матрица (т.е. $a_{ij}>0\ \forall i,j$).

Тогда:

1) Сущ-ет $\lambda>0$, вектора $e=(e_1,\dots,e_L)^t$, $f=(f_1,\dots,f_L)^t$, такие что $e_i, f_j>0\ \forall i,j$, такие что $Ae=\lambda e$, $f^tA=\lambda f^t$.

собств. значение — правый с.в. — левый с.в.

2) (единств. положит. с.в.) Если вектор $v=(v_1,\dots,v_L)$ удовлетворяет $v_j>0\ \forall j$, и $Av=\mu v$ для нек-го μ, то $\mu=\lambda$ и $v=\text{const}\, e$. Аналогично для левого с.в. f.

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k}{\lambda^k}=ef^t$, где e и f нормированы таким образом, что $\sum e_if_i=1$.

$\sum e_if_i = e^tf$

$ef^t=(e_if_j)_{1\le i,j\le L}$.

Док-во:

общий случай

(1) $\mathcal{P}$ мн-во распределений

$h^t\hat{A}=\left((h^t\hat{A})_1,\dots,(h^t\hat{A})_L\right)$, $h\in\mathcal{P}$

$\hat{A}:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ $\quad (h^t\hat{A})_i=\dfrac{(h^tA)_i}{\sum_{k=1}^L(h^tA)_k}=\dfrac{\sum_{j=1}^L h_ja_{ji}}{\sum_{k=1}^L\sum_{j=1}^L h_ja_{jk}}$

$h^t\hat{A}\in\mathcal{P}$

$\hat{A}$ – непрерывен на $\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ по Т. Брауэра о неподв. точке следует, что

$\exists f^t\in\mathcal{P}: f^t\hat{A}=f^t$. $\quad \sum_{i=1}^L f_i=1$

Пусть $\lambda=\sum_{k=1}^L(f^t\hat{A})_k$. Тогда $\boxed{f^tA=\lambda f^t}$, $f_j\ge 0$

Покажем, что $f_i>0$: если $f_i=0$ для какого-то i, то $(f^tA)_i=0 \Rightarrow \sum_{k=1}^L f_k \underset{>0}{a_{ki}}=0$

$\Rightarrow \forall k,\ f_k=0 \Rightarrow$ противоречие $\sum f_k=1$.

$\Rightarrow \lambda>0$.

Аналогично, находим вектор $e=(e_1,\dots,e_L)$, $\mu>0$, т.ч. $Ae=\mu e$, $e_j>0\ \forall j$.

Остаётся д-ть, что $\lambda=\mu$. Действительно,

$$\mu \underset{\sum e_jf_j}{e^tf}=(Ae)^tf=e^tA^tf=e^t(f^tA)^t=\lambda e^t(f^t)^t=\lambda e^tf$$

$\Rightarrow \mu=\lambda$, так как $e^tf\ne 0$, т.к. $e_j,f_j>0$.

случай, когда A – стохастическая

$e=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ $\quad Ae=e$

e – с.в. с с.з. $\lambda=1$.

$f^tA=f^t$. Возьмем в качестве f^t – стационарное состояние МЦ с ПЛВ A.

$f_j^t>0$, т.к. ПЛВ эргодична → работает эрг. теорема.

(3) Выберем произвольную тройку λ, e, f из пункта (1) теоремы.

Нормируем вектора так, что $\sum e_if_i=1$ и при этом $\sum e_i=1$.

Пусть $P_{ij}=\dfrac{a_{ij}e_j}{\lambda e_i}$. Тогда $\sum_{j=1}^L P_{ij}=1$.

Действительно $\sum p_{ij}=\sum a_{ij}e_j=(Ae)_i$

$\lim\limits_{k\to\infty}A^k=ef^t=\begin{pmatrix}f_1,\dots,f_L\\ \vdots\\ f_1,\dots,f_L\end{pmatrix}$

$\lambda=1$

следует из следствия 22(?) из эргодической теоремы для МЦ с ПЛВ A.

$\sum e_i f_i$ $\Rightarrow \mu = \lambda$, так как $e^t f \neq 0$.
т.к. $e_j, f_j > 0$.

---

③ Выберем произвольную тройку λ, e, f из пункта ① теоремы.
Нормируем вектора так, что $\sum e_i f_i = 1$ и при этом $\sum e_i = 1$.

Пусть $p_{ij} = \frac{a_{ij} e_j}{\lambda e_i}$. Тогда $\sum_{j=1}^{L} p_{ij} = 1$.

Действительно, $\sum_j p_{ij} = \frac{\sum_j a_{ij} e_j}{\lambda e_i} = \frac{(Ae)_i}{\lambda e_i} = \frac{\lambda e_i}{\lambda e_i} = 1$.

$\lim_{k\to\infty} A^k = e f^t$
$\lambda = 1$
$$= \begin{pmatrix} f_1, \dots, f_L \\ \vdots \\ f_1, \dots, f_L \end{pmatrix}$$
следует из следствия 22(?) из эргодической теоремы для МЦ с МПВ A.

$p_{ij} > 0 \quad \forall i, j. \Rightarrow \Pi = (p_{ij})$ - стохастическая, эргодическая.

Пусть π - единственное стац. сост. соотв. МЦ. Покажем, что $\pi_i = e_i f_i$.
т.е., проверим что
$(\pi \Pi)_j = \pi_j$ для выбора

$$(\pi \Pi)_j = \sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \cancel{e_i} f_i \frac{a_{ij} e_j}{\lambda \cancel{e_i}} = e_j \frac{\overbrace{\sum_i f_i a_{ij}}^{(f^t A)_j = \lambda f_j}}{\lambda} = \frac{e_j \cancel{\lambda} f_j}{\cancel{\lambda}} = e_j f_j.$$

$\Pi^k = (p_{ij}^{(k)})$. По эрг. теор., $p_{ij}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} \pi_j = e_j f_j$.
следств. 22(?)

$A^k = (a_{ij}^{(k)})$. $\quad a_{ij}^{(k)} = \sum_{1 \le r_1, \dots, r_{k-1} \le L} a_{ir_1} a_{r_1 r_2} \dots a_{r_{k-1} j} = \lambda^k \sum p_{ir_1} \frac{e_i}{\cancel{e_{r_1}}} p_{r_1 r_2} \frac{\cancel{e_{r_1}}}{e_{r_2}} \cdots p_{r_{k-1} j} \frac{\cancel{e_{r_{k-1}}}}{e_j} =$

$a_{ij} = p_{ij} \frac{\lambda e_i}{e_j}$

$$= \lambda^k \frac{e_i}{e_j} \sum p_{ir_1} \dots p_{r_{k-1} j} = \lambda^k \frac{e_i}{e_j} p_{ij}^{(k)}.$$
$\downarrow$
$e_j f_j$

$$\frac{a_{ij}^{(k)}}{\lambda^k} = \frac{e_i}{e_j} p_{ij}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{e_i}{\cancel{e_j}} \cancel{e_j} f_j$$

$$\boxed{\frac{A^k}{\lambda^k} \xrightarrow{k\to\infty} e f^t.}$$

Задача: д-ть пункт (2).

Ут. 31 Пусть A - $L\times L$-положит. матрица, а $\lambda > 0$, e и f - из теоремы 30 (Перрона-Фробениуса). Тогда:

① (λ - макс. с.з.) Если μ - с.з. A, т.ч. $\mu \neq \lambda$, то $|\mu| < \lambda$.

② (левые и правые собств. вектор-ы, соотв. с.з. λ, одномерны). Если $Av = \lambda v$, то $v = \text{const}\, e$. Если $w^t A = \lambda w^t$, то $w = \widetilde{\text{const}}\, f$.

Д-во: ① Пусть $v \neq 0$, т.ч. $Av = \mu v$. Тогда
$$\frac{A^k v}{\lambda^k} = \frac{\mu^k v}{\lambda^k} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k v.$$
Если $\lambda \neq \mu$, $|\mu| \geq |\lambda|$, то $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k$ — не сходится при $k\to\infty$.

т. П-Ф, (3) $\downarrow k \to \infty$

$e f^t v$

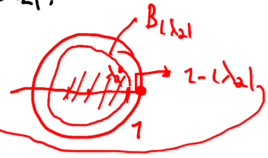
(2) Пусть $Av = \lambda v$, а постоянная c такова, что $(ce - v)_j > 0$.
Тогда $ce - v$ — с.в. с с.з. λ с положит. компонентами
$\Rightarrow$ по пункту (2) т. П-Ф, $ce - v = \tilde{c} e \Rightarrow v = (c - \tilde{c})e$.

Утв (Б/Ф) 32. Пусть имеется МЦ с МПВ Π, такой что $\Pi = (p_{ij})$, $p_{ij} > 0$.
Пусть Π удовл. утверждениям теор. П-Ф. Тогда, $p^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} f^t \ \forall p^{(0)}$,
где f^t нормирован таким образом, что $\sum f_j = 1$.

Утв. (Б/Ф) 33 Собств. значения эргодической матрицы Π удовл

(*) $$1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \dots \ge |\lambda_L|.$$

спектральная щель
spectral gap.



Утв 34 Расс. МЦ с МПВ Π, все с.з которой различны и удовл (*).
Тогда МЦ эргодична.

Д-во: Пусть $f^1, \dots, f^L$ — левые с.в. (строки) $f^j \Pi = \lambda_j f^j$.
Т.к. λ_j — различны, $f^1, \dots, f^L$ образуют базис в $\mathbb{C}^L$.
Возьмем произв. $p^{(0)} \in \Delta$. Разложим по этому базису:

$$p^{(0)} = \sum_{j=1}^{L} q_j f^j, \quad q_j \in \mathbb{C}. \quad \text{Тогда } p^{(k)} = p^{(0)} \Pi^k = \sum_j q_j f^j \Pi^k =$$

$$= \sum_j q_j \lambda_j^k f^j, \qquad \lambda_1 = 1.$$

$$|p^{(k)} - q_1 f^1|_1 = \Big|\sum_{j=2}^{L} q_j \lambda_j^k f^j\Big|_1 \le \underbrace{|\lambda_2|^k}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0,\ |\lambda_2|<1} \sum_{j=2}^{L} |q_j| \, |f^j|_1 \le$$

$\sum |q_j|$ зависит от $p^{(0)}$!

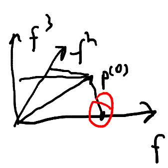
Можно д-ть, что $|q_j| \le C$, где C не зависит от $p^{(0)}$.

$$\le C_1 \underbrace{|\lambda_2|}_{<1}{}^k.$$

$p^{(k)} \to q_1 f^1 \Rightarrow q_1 f^1 \in \Delta$
$\Rightarrow q_1 f^1$ стац. распр-ие, т.к. $q_1 f^1 \Pi = \lambda_1 q_1 f^1 = q_1 f^1$.

$$q_1 = \frac{1}{\sum_j f_j^1}$$

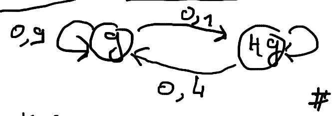
$\boxed{q_1 \sum f_j^1 = 1}$



Топологическая структура марковских цепей

18 декабря 2020 г.
16:18

Задача 3 от 24.11.

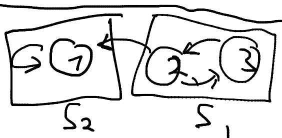


эргод.

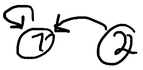
$$\frac{\#\{0\le k\le n:\ \xi_k = 9\}}{n}\cdot 100\%$$

Эрг. теор. $\} \quad P(\xi_k = 9) \xrightarrow{k\to\infty} \pi_9$

$\boxed{ЗБЧ} \to \quad \xrightarrow[n\to\infty]{P} \pi_9$



— эргодичны.
МПВ не эргодич.



$2 \to 2$

Обозначение: $i, j \in \{1,\dots,L\}$. $\quad i \to j$, если $\exists k:\ p_{ij}^{(k)} > 0$

Договоримся, что $i \to i$. (из i влечёт возможно перейти в j)

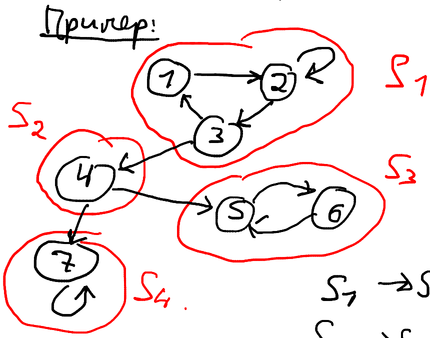
Можно найти путь по стрелкам, ведущий из сост. i в сост. j.

Опр Состояния i, j наз-ся сообщающимися, если $i \to j$ и $j \to i$

отношение экв. $\quad i\to j,\ j\to k \Rightarrow i \to k$

$$\Rightarrow \{1,\dots,L\} = \bigsqcup_{k=1}^{m} S_k,$$ где S_k — класс эквивалентности сообщающихся друг с другом состояний.
класс сообщаемости.

Пример:



Скажем, что $S_k \to S_l$, если из S_k можно попасть в S_l.

$\to$ — частичный порядок на мн-ве классов сообщ. S_k

$\Rightarrow \exists$ минимальные классы экв. (мин. кл. сообщаемости)

$S_1 \to S_2$, $S_1 \to S_3$, $S_1 \to S_4$

$S_2 \to S_3$, $S_2 \to S_4$

S_3, S_4 — мин. классы сообщ. $\quad E = S_3 \sqcup S_4$.

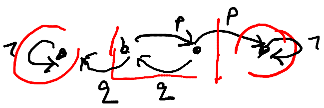
Обозначим $E = \bigsqcup$ мин. классов сообщаемости

$$I = \{1,\dots,L\} \setminus E$$

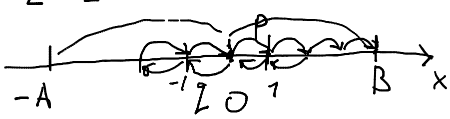
Опр Состояния из E наз-ся существенными (essential)
I несущественными (inessential).

Лемма 35 а) $P(\exists N:\ \xi_n \in E\ \ \forall n \ge N) = 1$.

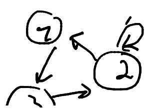
б) $\exists\ \lambda < 1,\ C > 0:\ P(\xi_n \notin E) \le C\lambda^n$, для любого $p^{(0)}$.



Gambler's problem.



Опр Цепь наз-ся неприводимой, если она имеет единственный класс сообщаемости.

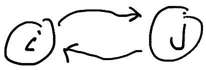


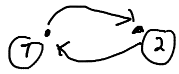
$\forall i, j\ \ \exists k = k(i,j):\ p_{ij}^{(k)} > 0$.

Если $\tilde{p}_{ik}$ не зависит от i, j — то МПВ была бы эргодична.

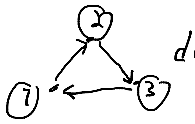
Рассмотрим неприводимую цепь.

Опр Периодом сост. i наз-ся число $d(i) = \text{НОД}\{k \geq 1 : p_{ii}^{(k)} > 0\}$.



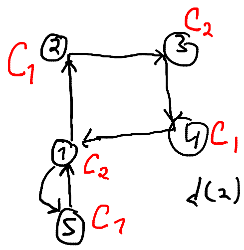


$d(1) = d(2) = 2$

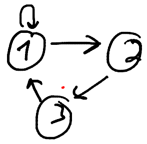


$d(1) = d(2) = d(3) = 3$.

$C_2 = \{5, 2, 4\}$



C_1, C_2



$d(1) = 1$

$d(2): 3, 4 \Rightarrow 1$

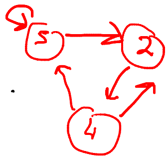
$d(3) = 1$

апериод. $d = 1$

$d(2): 4, 8, 12, \ldots$ 6 10

$d(2) = 2$.

$d = 2$.



апериодична

неприводимая.

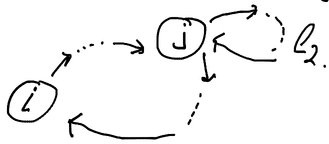
$d(5): 2, 4, 6, 8 \Rightarrow 2$.

Лемма 36 Период всех сост. цепи одинаков.

периодичная

Д-во:

$d(i) = ? \, d(j)$



$l_1 \vdots d(i)$

$l_2 \vdots d(j)$

$l_1 + l_2 \vdots d(i) \Rightarrow l_2 \vdots d(i)$.

$d(j) \geq d(i)$. ч.т.д.

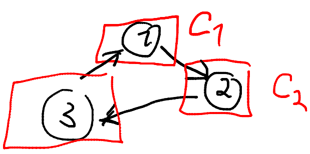
$\Rightarrow d(i) = d(j)$ в силу симметрии.

Опр Цепь наз-ся апериодической, если её период $= 1$.

Лемма 37 МЦ неприводима и апериодична $\Updownarrow$ МПВ эргодична.

Эрг. теор. МЦ непр + апериод $\Rightarrow$ МЦ эргодична.

Теор 38 Рассмотрим (неприводимую) МЦ период d.
Тогда $\exists!$ представление $\{1, \ldots, L\} = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_d$, т.ч.
если $p_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \in C_r, \; j \in C_{r+1}$ для нек-то r.
$C_j \neq \emptyset$



$d = 3$.

Теор 38 $\Rightarrow$ цепь с $d > 1$ не может быть эргодической.
Действительно,

$$C_1 \to C_2 \to C_3 \to \ldots \to C_d \to C_1$$

$\mathbb{P}(\xi_0 \in C_1) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\xi_{nd} \in C_1) = 1$

$\forall n$. $n \to \infty$

$\mathbb{P}(\xi_0 \in C_2) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\xi_{nd} \in C_1) = 0$ $\forall n$.

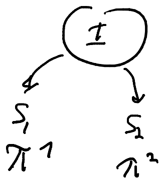
Итого, это соображение + лемма 35 + лемма 37 влекут:

Теор 39 (эргод. теорема 2) МЦ (с конечным числом состояний) эргодична $\iff$ она имеет единственный минимальный класс сообщаемости, и он апериодичен.

период $S_1 > 1$ — не эргодическая
$= 1$ — эргодична.

Напомним! $\forall$ МЦ с $<\infty$ # сост. имеют стац. распр.

Теор 40
МЦ с конечным числом состояний имеет ! стац. распр-ие $\iff$ она имеет ! миним. класс сообщаемости.



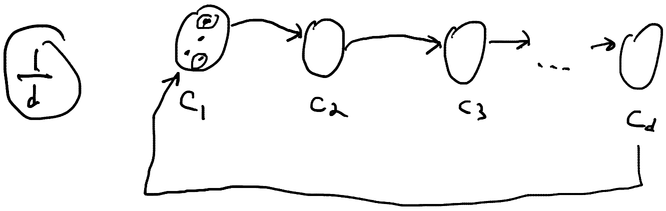
$\alpha\pi^1 + (1-\alpha)\pi^2$ — стац. сост. исходной цепи $\forall\, 0\le\alpha\le 1$.

π — стац. сост., то $\pi_j > 0 \iff j \in E$.

S_1 — ! мин. класс сооб.

период $S_1 = 1$ $\Rightarrow$ цепь эргод. по Теор. 39 $\Rightarrow$ стац. сост. !

период $S_1 > 1$: покажем, что стац. сост. !



Рассм. МЦ за d шагов. с мн-вом сост. C_1.
полученная цепь — апериодична, $\Rightarrow$ эргодическая.

π^1, π^2 — стац. сост. исх. цепи.

$$\sum_{j\in C_1} \pi^1_j = \sum_{j\in C_k} \pi^1_j = \frac{1}{d} \qquad \forall\ 1\le k\le d.$$

$\pi^1_j,\ j\in C_1$ $\qquad \underbrace{\tilde{\pi}^1 = (d\pi^1_j)_{j\in C_1}}_{\text{стац. распр-ие}} \in \mathcal{P}.$

$\Rightarrow \tilde{\pi}^1 = \tilde{\pi}^2. \Rightarrow \pi^1_j = \pi^2_j \quad \forall\, j\in C_1.$

$\Rightarrow \pi^1 = \pi^2.$