КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Мера и интеграл

Лектор В. И. Богачев (осень 2020)

Оглавление

Глава 1

Мера Лебега

§ 1.1. Основные задачи теории меры

Большинство теорий интеграла в том или ином виде имеют дело с теорией меры. Во многих задачах совершенно разных областей бывает полезно задавать меру множеств. Задача определения длин, площадей и объемов восходит к глубокой древности. Великие ученые античности дали блестящие образцы решения этой задачи в различных частных случаях, решения, которые относятся к величайшим достижениям науки. Однако формализация самой постановки этой задачи появилась не так уж давно, во второй половине XIX века, причем для классических мер. Как можно определить длину множества E в $[0,1]$? Для элементарного множества, т. е. конечного объединения дизъюнктных промежутков, естественно назвать длиной сумму длин этих промежутков (считая, что уже договорились, что это означает).

Как быть с неэлементарными множествами? Конструкция Пеано – Жордана близка античному подходу и состоит в том, что рассматриваются вписанные в E элементарные множества и берется точная верхняя грань их длин (это дает внутреннюю меру Жордана $\mathrm{mes}_i(E)$), а также содержащие E элементарные множества и точная нижняя грань их мер (это дает внешнюю меру Жордана $\mathrm{mes}_e(E)$).

Если $\mathrm{mes}_i(E) = \mathrm{mes}_e(E)$, то множество называется измеримым по Жордану, а полученное общее значение объявляется его мерой Жордана. Можно проверить, что это равносильно интегрируемости по Риману индикатора I_E множества E. Например, в множество Q рациональных чисел в $[0,1]$ можно вписать лишь конечные элементарные множества, поэтому его внутренняя мера Жордана равна нулю. Всякое же элементарное множество, содержащее все рациональные числа, может быть лишь всем отрезком без конечного числа иррациональных точек. Значит, внешняя мера Жордана множества Q равна 1 (при этом оно очевидным образом имеет лебеговскую меру нуль!).

Таким образом, класс измеримых по Жордану множеств имеет недостатки, похожие на недостатки интеграла Римана. В конце XIX века предпринимались попытки усовершенствовать определение меры, но лишь в самом начале XX века ощутимый прогресс был достигнут молодым французским математиком Анри Лебегом.

1.1.1. Определение. *Внешняя мера Лебега множества E в отрезке определяется формулой*

$$\lambda^*(E) = \inf\Bigl\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(U_i), \quad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Bigr\}, \tag{1.1.1}$$

где $\inf$ *берется по всем счетным или конечным покрытиям интервалами U_i, $\lambda(U_i)$ — обычная длина. Аналогично определяется внешняя мера $\lambda^*(E) = \lambda_d^*(E)$ множества E в кубе в $\mathbb{R}^d$, в качестве U_i берутся открытые кубы с ребрами, параллельными координатным осям.*

Ясно, что $0 \leqslant \lambda^*(E) \leqslant \lambda(I)$. Для всякого отрезка J получаем $\lambda^*(J) = \lambda(J)$, ибо сумма длин покрывающих интервалов не может стать меньше длины отрезка J (счетное покрытие имеет конечное подпокрытие, поэтому здесь все сводится к конечным покрытиям).

Внешнюю меру определили на всех множествах, но в большинстве приложений полезно иметь дело со счетно-аддитивными мерами, причем на областях определения, допускающих счетные теоретико-множественные операции. Еще античные математики вычисляли объемы сложных тел методом, который в современных терминах можно назвать счетным разбиением на элементарные множества.

Таким образом, естественное требование к области определения меры состоит в том, чтобы она была замкнута относительно счетных объединений, пересечений и взятия дополнения. Это то, что в следующем параграфе будет названо сигма-алгеброй. От самой же меры хотят счетную аддитивность, т.е. чтобы значение меры на счетном объединении дизъюнктных частей из области определения было равно сумме ряда мер этих частей. Конечная аддитивность — такое равенство для конечных объединений.

Вот с мерой Жордана проблема как раз в незамкнутости области определения относительно счетных объединений. Конечно, классическая проблема сложна дополнительным условием: на неких множествах мера уже предписана, поэтому речь идет не о переопределении, а о продолжении. Если забыть об уже измеренных множествах, то никаких проблем нет: можно нулем все сделать, а если желать получить вероятностные меры (неотрицательные со значением 1 на всем пространстве), то можно взять меру Дирака δ_a в какой-либо точке a, т.е.

$\delta_a(A) = 1$, если $a \in A$, $\delta_a(A) = 0$, если $a \notin A$, либо похожим образом устроенную меру со счетным носителем, сложив меры Дирака δ_{a_n} в точках a_n с весами $c_n > 0$ из сходящегося ряда. Такие меры находят много применений, но не согласуются с предписанными значениями классических объемов. Наконец, в классической ситуации продолжения предписанных объемов еще один нюанс возникает: на исходных элементарных множествах площадь и объем инвариантны относительно некоторых преобразований типа сдвигов или поворотов, но надо ли и можно ли требовать это же от продолжений?

Какие же ответы удается получить на эти вопросы?

• Длину, площадь, объем можно продолжить до счетно-аддитивных мер на сигма-алгебрах, содержащих исходные элементарные множества. При этом продолжения на наименьшие такие сигма-алгебры единственны и даются формулой Лебега (1.1.1).

• Нам не дано знать, задает ли формула Лебега счетно-аддитивную функцию на всех множествах. Если принять аксиому выбора, то ответ отрицательный (но может быть положительным при иных аксиомах).

• Нам также не дано знать, можно ли длину продолжить счетно-аддитивно на все множества каким-либо иным способом, отличным от формулы Лебега. Однако и здесь при неких дополнительных теоретико-множественных аксиомах (но не аксиоме выбора) ответ отрицательный. Похожа ситуация с инвариантными продолжениями.

• Если оставить в стороне меры с предписанными значениями на элементарных множествах и обратиться к общим ненулевым счетно-аддитивным мерам, то можно эффективно строить вероятностные меры указанного выше дираковского типа на всех множествах, однако без дополнительных теоретико-множественных предположений нельзя узнать, есть ли счетно-аддитивные меры на классе всех множеств, обращающиеся в нуль на всех точках (их нет при неких аксиомах).

• Не следует пытаться строить меры на всех множествах, а надо удовольствоваться наименьшими сигма-алгебрами, содержащими элементарные множества, т.е. борелевскими сигма-алгебрами. Борелевские множества не имеют явного описания, да и вряд ли можно понять, что это такое, но к ним можно привыкнуть, как мы привыкаем к телефонам и компьютерам, не вполне зная их устройство. Немного привыкнув к ним, можно успешно обращаться с общими борелевскими мерами. Они не связаны с классической мерой Лебега, но удивительным образом получаются из нее измеримыми преобразованиями.

Далее эти тезисы наполняются некоторыми техническими деталями.

§ 1.2. Алгебры и σ-алгебры

1.2.1. Определение. *Класс подмножеств* $\mathcal{A}$ *множества* X *называется алгеброй, если он содержит все* X *и допускает взятие дополнения, конечного объединения и пересечения.*

Класс подмножеств $\mathcal{A}$ *множества* X *называется* σ*-алгеброй* (*сигма-алгеброй*)*, если он содержит все* X *и допускает взятие дополнения, счетного объединения и счетного пересечения.*

Условие с пересечением включено для симметрии и наглядности, но технически оно вытекает из первых двух, ибо

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n).$$

Ясно, что σ-алгебра есть алгебра, замкнутая относительно счетных объединений.

1.2.2. Пример. (i) Наименьшая σ-алгебра в X состоит из пустого множества $\varnothing$ и всего X, наибольшая — класс 2^X всех подмножеств в X.

(ii) Класс всяческих конечных объединений промежутков вида (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ в фиксированном отрезке есть алгебра, но не σ-алгебра.

(iii) Класс всех конечных подмножеств X и их дополнений есть алгебра, но не σ-алгебра для бесконечного X.

(iv) Класс всех не более чем счетных подмножеств X и их дополнений есть σ-алгебра.

1.2.3. Определение. *Для всякого класса* $\mathcal{F}$ *подмножеств* X *есть наименьшая* σ*-алгебра, содержащая* $\mathcal{F}$*. Она обозначается символом* $\sigma(\mathcal{F})$ *и задается формулой*

$$\sigma(\mathcal{F}) = \textit{пересечение всех } \sigma\textit{-алгебр, содержащих}.$$

Эта σ*-алгебра называется порожденной классом* $\mathcal{F}$.

Борелевской σ*-алгеброй* $\mathcal{B}(X)$ *топологического пространства* X *называется* σ*-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами. Множества из нее называют борелевскими.*

Конечно, следует проверить, что указанная формула в самом деле дает σ-алгебру.

Эта формула лишь кажется явной, но ничего конструктивного в ней нет. Как правило, с ее помощью не удается проверить принадлежность к $\sigma(X)$. Скажем, практическая проверка проверка борелевости множества заключается в том, что удается указать счетную последовательность шагов получения этого множества счетными операциями.

Например, замкнутые множества борелевы как дополнения открытых. Счетные объединения замкнутых (скажем, множество рациональных чисел) борелевы, хотя могут не быть открытыми или замкнутыми.

Возникает искушение строить борелевские множества индуктивно: начать с класса $\mathcal{B}_0$ открытых множеств, класс $\mathcal{B}_{n+1}$ получать из $\mathcal{B}_n$ присоединением дополнений, счетных объединений и счетных пересечений множеств из $\mathcal{B}_n$. Можно показать (это довольно непросто: нелегко предъявить пример даже множества из класса $\mathcal{B}_3$, не входящего в $\mathcal{B}_2$), что все классы $\mathcal{B}_n$ различны и не являются σ-алгебрами, причем даже их объединение не σ-алгебра!

Таким образом, нет явного описания борелевских множеств. Правда, предыдущую попытку можно довести до успеха, если использовать трансфинитную индукцию и счетные ординалы, но ничего явного это тоже не даст. Хотя сейчас уже привыкли к этому обстоятельству, но сто лет назад оно считалось большой проблемой. В попытке ее решить студент Московского университета Михаил Суслин ввел так называемую операцию Суслина (А-операцию). Она задается так. Предположим, что для каждого упорядоченного конечного набора натуральных чисел $n_1, \dots, n_k$ задан интервал $I_{n_1,\dots,n_k}$. Тогда говорят, что задана таблица Суслина $\{I_{n_1,\dots,n_k}\}$. Результат исполнения операции Суслина над этой таблицей есть множество

$$S\{I_{n_1,\dots,n_k}\} = \bigcup\nolimits_{(n_i)} \bigcap\nolimits_{k=1}^{\infty} I_{n_1,\dots,n_k},$$

где объединение берется по всем бесконечным последовательностям натуральных чисел (n_i), т.е. объединение континуально. Множества этого вида называются суслинскими. Оказывается, что все борелевские множества кодируются такими таблицами (это было основной целью Суслина — дать конструктивное задание борелевских множеств). На первый взгляд, это не очень удивительно из-за континуальности объединения, ведь почему бы не всем вообще множествам иметь такие кодировки? Однако нетрудно сообразить, что таблиц континуум, поэтому заведомо суслинских множеств тоже континуум, т.е. гораздо меньше, чем всех множеств. Суслин установил (кстати, в дипломной работе), что бывают неборелевские суслинские множества. Это выглядело как отрицательный результат, но на самом деле привело к чрезвычайно важному объекту современного анализа.

Борелевские σ-алгебры — самые типичные области определения счетно-аддитивных мер.

Банальное наблюдение: борелевская σ-алгебра порождается не только открытыми, но и замкнутыми множествами. На прямой она порождается интервалами с рациональными концами. Вместо интервалов можно брать отрезки или полуинтервалы (или лучи с рациональными концами), но недостаточно брать только точки (докажите!).

В $\mathbb{R}^n$ борелевская σ-алгебра порождается открытыми кубами с ребрами, параллельными осям. Можно брать и замкнутые кубы или шары (докажите!), но недостаточно брать только шары с центром в нуле.

В сепарабельном метрическом пространстве (все ли помнят после карантина, что это такое?) борелевская σ-алгебра тоже порождается открытыми шарами, скажем, рационального радиуса с центрами из точек счетного всюду плотного множества (докажите!). В несепарабельном метрическом пространстве это может быть неверно. Скажем, если на прямой взять дискретную метрику (все ненулевые расстояния равны 1), то шары — отдельные точки и все пространство. Порождаемая ими σ-алгебра состоит из счетных множеств и их дополнений, а борелевская из всех множеств, ибо точки этого странного пространства оказываются открытыми множествами, значит, таковы и их произвольные объединения.

§ 1.3. Аддитивные и счетно-аддитивные функции множества

Перейдем к мерам.

1.3.1. Определение. *Числовая функция μ на σ-алгебре $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ называется счетно-аддитивной, если*

$$\mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

для всех наборов попарно непересекающихся множеств $A_n \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Более слабое свойство, когда равенство верно для конечных объединений попарно непересекающихся множеств, называют конечной аддитивностью.

Разумеется, конечную аддитивность достаточно проверять для пар множеств. На σ-алгебрах существуют конечно-аддитивные функции множества, не являющиеся счетно-аддитивными, но конструктивных примеров нет (используется аксиома выбора). Легко привести конструктивный пример на алгебре.

1.3.2. Пример. *На алгебре конечных множеств в $\mathbb{N}$ и их дополнений введем функцию m так: $m(A) = 0$, $m(\mathbb{N}\backslash A) = 1$ для конечных A. Тогда m аддитивна, но не счетно-аддитивна.*

1.3.3. Замечание. Если функция μ аддитивна на $\mathcal{A}$, то ее счетная аддитивность равносильна тому, что для всякой последовательности множеств $B_n \in \mathcal{A}$ с $B_n \subset B_{n+1}$ (т.е. возрастающей) и объединением B из $\mathcal{A}$ мы имеем соотношение $\mu(B_n) \to \mu(B)$. Иначе говоря:

$$B_n \uparrow B \Rightarrow \mu(B_n) \to \mu(B).$$

Для этого для дизъюнктных A_n в качестве B_n берем $A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Это же равносильно тому, что для всякой последовательности множеств $C_n \in \mathcal{A}$ с $C_{n+1} \subset C_n$ и $\cap_n C_n = \varnothing$, т.е. убывающей к пустому множеству, мы имеем $\mu(C_n) \to 0$. Это называется «непрерывностью в нуле». Иначе говоря:

$$C_n \downarrow \varnothing \Rightarrow \mu(C_n) \to 0.$$

Действительно, в этом случае множества $B_n = C_1 \backslash C_n$ возрастают к C_1.

Явных примеров счетно-аддитивных мер на сигма-алгебрах мало. Вот два основных (в математике много — когда больше двух).

1.3.4. Пример. (i) Пусть $p_n \geqslant 0$, $\sum_n p_n = 1$. На всяком множестве $A \subset \mathbb{N}$ положим

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} p_n.$$

Докажите, что получена счетно-аддтивная мера. Аналогично строятся меры на любых счетных множествах.

(ii) На σ-алгебре $\mathcal{A}$ всех подмножеств несчетного множества X, которые либо счетны, либо дополнительны к счетным, положим

$$\mu(A) = 0, \quad \mu(X \backslash A) = 1 \quad \text{для счетных } A.$$

Тогда мера μ счетно-аддитивна. В самом деле, если множества $A_n \in \mathcal{A}$ попарно непересекаются, то среди них не может быть более одного множества со счетным дополнением. Если таково A_1, то $\mu(A_1) = 1$, $\mu(A_n) = 0$ для остальных, причем дополнение к $\bigcup_n A_n$ тоже счетно, так что $\mu(\bigcup_n A_n) = 1$. Если же все A_n счетны, то таково и их объединение.

Поскольку бывают аддитивные не счетно-аддитивные функции, возникает вопрос о проверке счетной аддитивности не по определению (или предыдущему замечанию). Важнейший практически способ таков.

1.3.5. Определение. *Класс $\mathcal{K}$ подмножеств абстрактного пространства X называется компактным, если для всякой последовательности множеств $K_n \in \mathcal{K}$ с $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$ есть такое N, что $\bigcap_{n=1}^{N} K_n = \varnothing$.*

Основной пример — произвольный набор компактов в данном пространстве (проверьте!). Для теории меры это нужно вот зачем.

1.3.6. Теорема. *Пусть μ — неотрицательная аддитивная функция множества на некоторой алгебре множеств $\mathcal{A}$ в пространстве X, причем есть компактный класс $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$, приближающий меру в следующем смысле: для всякого $A \in \mathcal{A}$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K_\varepsilon \in \mathcal{K}$, что $K_\varepsilon \subset A$ и $\mu(A \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда μ счетно-аддитивна на $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Проверим непрерывность меры в нуле. Пусть множества $A_n \in \mathcal{A}$ убывают и их пересечение пусто. Покажем, что $\mu(A_n) \to 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем такие $K_n \in \mathcal{K}$, что $K_n \subset A_n$ и $\mu(A_n \backslash K_n) < \varepsilon 2^{-n}$. Ясно, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. По условию найдется такое m, что $\bigcap_{n=1}^{m} K_n = \varnothing$. Таким образом,

$$A_m = A_m \backslash \bigcap_{n=1}^{m} K_n = \bigcup_{n=1}^{m} (A_m \backslash K_n) \subset \bigcup_{n=1}^{m} (A_n \backslash K_n),$$

откуда

$$\mu(A_m) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n \backslash K_n) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \varepsilon 2^{-n} \leqslant \varepsilon.$$

Итак, $\mu(A_n) \to 0$, что влечет счетную аддитивность μ. □

С помощью этого утверждения мы проверим счетную аддитивность меры Лебега на алгебре, порожденной промежутками или кубами. Однако это еще не полностью решает проблему: ведь нужны меры на сигма-алгебрах. Этому посвящен следующий параграф, но сейчас мы убедимся в том, что данное выше условие счетной аддитивности весьма универсально, так что весьма непросто найти счетно-аддитивную меру, не обладающую приближающим компактным классом (хотя такие есть).

1.3.7. Теорема. *Пусть μ — неотрицательная счетно-аддитивная мера на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда для всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие открытое множество U_ε и компакт K_ε, что $K_\varepsilon \subset B \subset U_\varepsilon$ и $\mu(U_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Доказательство. Покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое замкнутое множество $F_\varepsilon \subset B$, что $\mu(B\backslash F_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Тогда в силу счетной аддитивности μ само F_ε можно приблизить изнутри с точностью до $\varepsilon/2$ компактом $F_\varepsilon \cap U$, где U — замкнутый шар достаточно большого радиуса (пересечения $F_\varepsilon \cap \{x\colon |x| \leqslant k\}$ возрастают к F_ε, поэтому их меры стремятся к мере F_ε).

Обозначим через $\mathcal{A}$ класс всех таких множеств $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество F_ε и открытое множество U_ε, для которых $F_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon$ и $\mu(U_\varepsilon\backslash F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Заметим, что всякое замкнутое множество A входит в $\mathcal{A}$, ибо в качестве F_ε можно брать само A, а в качестве U_ε можно взять некоторую открытую δ-окрестность A^δ множества A, т. е. объединение всех открытых шаров радиуса δ с центрами в точках из A (при стремлении δ к нулю открытые множества A^δ убывают к A, поэтому их меры стремятся к мере A в силу сделанного выше замечания).

Покажем, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра. Если это сделано, то теорема доказана, так как замкнутые множества порождают борелевскую σ-алгебру.

По построению класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно операции дополнения. Поэтому остается проверить замкнутость $\mathcal{A}$ относительно счетных объединений. Пусть $A_j \in \mathcal{A}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие замкнутые множества F_j и открытые множества U_j, что $F_j \subset A_j \subset U_j$ и $\mu(U_j\backslash F_j) < \varepsilon 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$. Множество $U = \bigcup_{j=1}^\infty U_j$ открыто, а множество $Z_k = \bigcup_{j=1}^k F_j$ замкнуто для всякого $k \in \mathbb{N}$. Остается заметить, что $Z_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j \subset U$ и при достаточно большом k имеет место оценка $\mu(U\backslash Z_k) < \varepsilon$. Действительно,

$$\mu\Bigl(\bigcup_{j=1}^\infty (U_j\backslash F_j)\Bigr) < \sum_{j=1}^\infty \varepsilon 2^{-j} = \varepsilon \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} \mu(Z_k) = \mu\Bigl(\bigcup_{j=1}^\infty F_j\Bigr)$$

в силу счетной аддитивности. □

Это же верно для всякой счетно-аддитивной меры на борелевской σ-алгебре произвольного полного сепарабельного метрического пространства. Доказательство аналогично, но сначала надо проверить, что есть компакт K с $\mu(X\backslash K) < \varepsilon$. Выше в качестве такового брался шар, но в общем случае шары некомпактны.

§ 1.4. Внешняя мера и продолжения мер

Поскольку одной из первичных целей является построение счетно-аддитивных мер на сигма-алгебрах, а совсем явно они могут быть построены в немногих случаях, возникает план строить меры на алгебрах и продолжать их. Эффективное и выполняющееся во всех приложениях условие счетной аддитивности аддитивной функции множества рассмотрено выше: компактные приближающие классы. Но вот есть хорошая мера на алгебре, скажем, лебеговская, можно ли ее продолжить на сигма-алгебру? Вообще говоря, даже если счетно-аддитивная мера уже задана на сигма-алгебре, то не всегда ее можно продолжить на данную более широкую сигма-алгебру.

1.4.1. Пример. В борелевской σ-алгебре прямой возьмем под-σ-алгебру множеств первой категории и их дополнений, а также меру μ из примера 1.3.4(ii), равную 0 на множествах первой категории и 1 на их дополнениях. Эту меру нельзя продолжить до счетно-аддитивной меры на борелевской σ-алгебре. Действительно, если ν — такое продолжение, то $\nu(\mathbb{Q}) = 0$. По теореме 1.3.7 множество иррациональных чисел должно содержать компакт K с $\nu(K) > 0$. Однако такой компакт нигде не плотен, поэтому есть множество первой категории, значение на котором ν совпадает с нулевым значением исходной меры μ.

Тем не менее замечательным образом оказывается, что всякая счетно-аддитивная мера μ на алгебре $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ продолжается до счетно-аддитивной меры на минимальной сигма-алгебре, содержащей данную алгебру (предыдущий пример этому не противоречит). Более того, продолжение осуществляется явной формулой (впрочем, степень явности этой формулы не стоит переоценивать), которая задает так называемую *внешнюю меру* на ВСЕХ множествах:

$$\mu^*(E) = \inf\Bigl\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\colon A_j \in \boldsymbol{\mathcal{A}},\, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Bigr\}.$$

Это в точности аналог внешней меры Лебега для класической длины.

Будет ли внешняя мера хотя бы аддитивна на всех множествах? Ответ зависит от теоретико-множественных установок. Если принять аксиому выбора, то ответ отрицательный. Аксиома выбора разрешает образовать множество, содержащее ровно по одному элементу из данного набора непустых дизъюнктных множеств. Точнее говоря, имеется шкала аксиом выбора для разных мощностей наборов множеств. Самая слабая — счетные наборы счетных множеств. Такая счетная форма аксиомы выбора необходима даже для того, чтобы менять порядок суммирования в двойном ряде.

1.4.2. Пример. (Пример Витали) Точки x и y прямой объявим эквивалентыми, если $x - y$ рационально. Знающие, что такое отношение эквивалентности, должны быстро проверить, что такое отношение получено. Аксиома выбора позволяет взять множество V (множество Витали), содержащее ровно по одному представителю из каждого класса эквивалентности (всякий класс есть некий представитель и все отличающиеся на него рациональными сдвигами). Можно взять представителей из $[0,1]$. С таким множеством внешняя мера Лебега не может быть аддитивна.

В самом деле, если $\lambda^*(V) = 0$, то $\lambda^*(V + r) = 0$ для всякого рационального r. Легко проверить (ниже это сделано в общем случае), что тогда объединение счетного числа множеств $V + r$ тоже имеет нулевую внешнюю меру, что невозможно, ибо это вся прямая. Остается случай $\lambda^*(V) = \alpha > 0$. Здесь тоже противоречие: ясно, что $\lambda^*(V+r) = \lambda^*(V)$ при всех r, но при разных $p, q \in \mathbb{Q}$ множества $V + p$ и $V + q$ не пересекаются, ибо если $v_1 + p = v_2 + q$, то v_1 и v_2 эквивалентны, а в V лишь по одному представителю. Значит, при рациональных $r \in [0,1]$ все $V + r$ дизъюнктны и лежат в $[0,2]$, причем имеют равные внешние меры. Если бы внешняя мера была аддитивна, то на $[0,2]$ была бы бесконечна.

Есть два пути бороться с этой проблемой: 1) запретить аксиому выбора, 2) уменьшить область определения внешней меры. Лебег, хотя и не поверил в множество Витали, пошел по второму пути и ввел такое определение.

1.4.3. Определение. *Множество E называется измеримым относительно внешней меры μ^*, порожденной счетно-аддитивной мерой μ на алгебре $\mathcal{A}$, если*

$$\mu^*(E) + \mu^*(X \backslash E) = \mu(X).$$

Класс измеримых множеств обозначим через $\mathcal{A}_\mu$.

Таким образом, условие измеримости — минимум того, что надо сделать для аддитивности μ^* хотя бы на паре множеств E и $X \backslash E$.

Классикам всегда везет: оказалось, что введенный им класс — σ-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$, причем на ней внешняя мера счетно-аддитивна.

Сейчас это докажем, но нужны две технические леммы, чтобы разгрузить доказательство основной теоремы.

1.4.4. Лемма. *Имеем* (i) $\mu^*(\varnothing)=0$,

$$\text{(ii)}\quad \mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)\quad \textit{при } A\subset B,$$

$$\text{(iii)}\quad \mu^*\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Bigr)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)\quad \textit{для всех } E_n\subset X.$$

Доказательство. Первые два свойства очевидны. Для доказательства (iii) возьмем $\varepsilon>0$ и для каждого n покроем E_n множествами $A_{nj}\in\boldsymbol{\mathcal{A}}$ так, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{nj})\leqslant\mu^*(E_n)+\varepsilon 2^{-n}.$$

Это можно, если помнить, что такое inf. Тогда $E=\bigcup_n E_n$ покрыто всеми A_{nj} и

$$\mu^*(E)\leqslant\sum_{n,j}\mu^*(A_{n,j})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\mu^*(E_n)+\varepsilon 2^{-n})=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)+\varepsilon,$$

что дает нужную оценку при $\varepsilon\to 0$. □

1.4.5. Следствие. *Если $E\in\boldsymbol{\mathcal{A}}$, то $\mu^*(E)=\mu(E)$ и $E\in\boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$.*

Доказательство. Ясно, что $\mu^*(E)\leqslant\mu(E)$, ибо E само себя покрывает и входит в $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Пусть $E\subset\bigcup_n A_n$, $A_n\in\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Заменив A_n на $E\cap A_n\in\boldsymbol{\mathcal{A}}$, можно считать, что $A_n\subset E$. Если бы A_n были дизъюнктны, то получили бы равенство $\mu(E)$ сумме ряда из мер A_n. Но они могут пересекаться, поэтому в общем случае оценка, которая следует из того, что $\mu\bigl(\bigcup_{n=1}^N A_n\bigr)\to\mu(E)$ (свойство счетной аддитивности), причем $\mu\bigl(\bigcup_{n=1}^N A_n\bigr)\leqslant\sum_{n=1}^N\mu(A_n)$ из-за конечной аддитивности и неотрицательности (очевидно из дробления $A_1,\ldots,A_N$ на дизъюнктные куски). Итак, $\mu(E)\leqslant\sum_n\mu(A_n)$, так что меньше $\mu(E)$ сделать не получится, т.е. $\mu^*(E)=\mu(E)$. Это же верно и для дополнения, откуда $E\in\boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$. □

Можно заметить, что в самой лемме не использовалась счетная аддитивность μ, а в следствии она была важна.

1.4.6. Лемма. *Имеют место соотношения*

$$\mu^*(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n),\quad \textit{если } A_n\in\boldsymbol{\mathcal{A}},\ \ A_n\subset A_{n+1},\ \ A=\textstyle\bigcup_n A_n,$$

$$\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B)\leqslant\mu^*(A)+\mu^*(B)\quad \textit{для всех } A,B.$$

Доказательство. Ясно, что $\mu(A_n) \leqslant \mu^*(A)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такие возрастающие номера n_k, что $\mu(A_{n_k}) > \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) - \varepsilon 2^{-k}$. Тогда $\mu(A_{n_{k+1}} \backslash A_{n_k}) < \varepsilon 2^{-k}$, причем множества A_{n_1}, $A_{n_2} \backslash A_{n_1}$ и т.д. покрывают A. Поэтому

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A_{n_1}) + \mu(A_{n_2} \backslash A_{n_1}) + \cdots \leqslant \mu(A_{n_1}) + \varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) + \varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε дает нужное равенство.

Для доказательства оставшейся оценки возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем множества U и V вида $U = \bigcup_n U_n$, $V = \bigcup_n V_n$, где $U_n, V_n \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, $U_n \subset U_{n+1}$, $V_n \subset V_{n+1}$, для которых $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(U) - \varepsilon$, $\mu^*(B) \geqslant \mu^*(V) - \varepsilon$. Это можно сделать по определению внешней меры: покрыв U множествами $I_j \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ с $\mu^*(U) \geqslant \sum_j \mu(I_j) - \varepsilon$ и взяв $U_n = \bigcup_{j=1}^n I_j$ и аналогично для V. Тогда $A \cup B \subset U \cup V$, $A \cap B \subset U \cap V$, значит,

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(U \cup V) + \mu^*(U \cap V).$$

По доказанному,

$$\mu^*(U \cup V) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n \cup V_n), \quad \mu^*(U \cap V) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n \cap V_n).$$

В силу аддитивности меры на $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ имеем

$$\mu(U_n \cup V_n) + \mu(U_n \cap V_n) \leqslant \mu(U_n) + \mu(V_n).$$

Так как $\mu(U_n) \to \mu^*(U)$, $\mu(V_n) \to \mu^*(V)$, получаем

$$\mu^*(U \cup V) + \mu^*(U \cap V) \leqslant \mu^*(U) + \mu^*(V) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon + \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Вспоминая, что лева часть не меньше $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B)$, при $\varepsilon \to 0$ получаем нужную оценку. $\square$

1.4.7. Теорема. *Класс $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$ является σ-алгеброй, содержит $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, поэтому и $\sigma(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, внешняя мера μ^* счетно-аддитивна на $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$ и продолжает μ.*

Доказательство. Уже знаем, что $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subset \boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$ и μ^* продолжает μ. Если бы знать, что $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$ — алгебра, а μ^* аддитивна, то все быстро проверяется: если $A_n \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$ дизъюнктны, то для $A = \bigcup_n A_n$ при всех N имеем

$$\sum_{n=1}^N \mu^*(A_n) = \mu^*\Bigl(\bigcup_{n=1}^N A_n\Bigr) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n),$$

откуда $\mu^*(A) = \sum_n \mu^*(A_n)$. Кроме того, $X\backslash A \subset X\backslash \bigcup_{n=1}^N A_n$ для всякого N, поэтому

$$\mu^*(A)+\mu^*(X\backslash A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n)+\mu(X)-\sum_{n=1}^N \mu^*(A_n) = \mu(X)+\sum_{N+1}^\infty \mu^*(A_n),$$

что при $N \to \infty$ дает оценку $\mu^*(A) + \mu^*(X\backslash A) \leqslant \mu(X)$. По лемме есть и противоположная оценка. Это означает измеримость A, т.е. замкнутость относительно и счетных объединений.

Проверим, что $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$ есть алгебра. Дополнения можно брать по определению. Пусть $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$. Надо показать, что

$$\mu^*(A\cup B) + \mu^*(X\backslash(A\cup B)) \leqslant \mu(X),$$

так как обратное верно по лемме. Мы имеем равенство

$$\mu^*(A) + \mu^*(X\backslash A) + \mu^*(B) + \mu^*(X\backslash B) = 2\mu(X),$$

а также неравенства из последней леммы

$$\mu^*(A\cup B) + \mu^*(A\cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

$$\mu^*(X\backslash(A\cup B)) + \mu^*(X\backslash(A\cap B)) \leqslant \mu^*(X\backslash A) + \mu^*(X\backslash B),$$

где во второй оценке использованы тождества

$$X\backslash(A\cup B) = (X\backslash A)\cap(X\backslash B),\ X\backslash(A\cap B) = (X\backslash A)\cup(X\backslash B).$$

Сумма левых частей последних двух неравенств равна $2\mu(X)$, что возможно только в том случае, когда эти неравенства обращаются в равенства, ибо $\mu^*(A\cup B) + \mu^*(X\backslash(A\cup B)) \geqslant \mu(X)$ и аналогично для пересечения. Итак, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$ алгебра. Остается проверить, что $\mu^*(A\cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ для дизъюнктных $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$. Это видно из второго из предыдущих равенств (в которые превратились неравенства), ибо для измеримых A, B оно принимает вид $\mu^*(X\backslash(A\cup B)) + \mu(X) = 2\mu(X) - \mu^*(A) - \mu^*(B)$, где слева с учетом измеримости $A\cup B$ имеем $2\mu(X) - \mu^*(A\cup B)$. $\square$

СОГЛАШЕНИЕ: *далее счетно-аддитивная мера μ^* на σ-алгебре $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$ обозначается прежним символом μ, как исходная мера. Значок μ^* сохраняется для значений на потенциально неизмеримых множествах.*

Отметим, что попутно мера μ продолжена на порожденную сигма-алгебру $\sigma(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Отчего бы сразу не использовать явную формулу для продолжения только на $\sigma(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ и зачем эта морока с $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\mu$? Попробуйте так сделать и расскажите, если получится.

1.4.8. Следствие. *Описанное выше продолжение — единственно возможно неотрицательное счетно-аддитивное продолжение меры μ на порожденную сигма-алгебру $\sigma(\mathcal{A})$, а также единственное такое продолжение на $\mathcal{A}_\mu$.*

Доказательство. Пусть ν — неотрицательное счетно-аддитивное продолжение меры μ на $\sigma(\mathcal{A})$. Пусть $A \in \sigma(\mathcal{A})$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем такие $A_n \in \mathcal{A}$, что $A \subset \bigcup_n A_n$ и $\mu^*(A) \geqslant \sum_n \mu(A_n) - \varepsilon$. Пусть $B = \bigcup_n A_n$. Тогда

$$\nu(A) \leqslant \nu(B) \leqslant \sum_n \nu(A_n) = \sum_n \mu(A_n) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Значит, $\nu(A) \leqslant \mu^*(A)$. Точно так же $\nu(X\backslash A) \leqslant \mu^*(X\backslash A)$. Однако $\mu^*(A) + \mu^*(X\backslash A) = \nu(A) + \nu(X\backslash A) = \mu(X)$, поэтому $\nu(A) \leqslant \mu^*(A)$. Случай $\mathcal{A}_\mu$ аналогичен. $\square$

1.4.9. Замечание. Короткий комментарий про первую возможность борьбы с неизмеримыми множествами: запрет аксиомы выбора. Как уже сказано, нехорошо совсем ее запретить, надо хотя бы счетную форму оставить, иначе даже рядов не будет (впрочем, кому-то это не покажется ужасным). Кроме того, что-то запретив, надо хоть что-то разрешить взамен. У аксиомы выбора есть конкурент: аксиома детерминированности (D). Важно при этом, что ее можно ввести при счетной аксиоме выбора. Аксиома (D) такова. Два студента матфака долго играют в следующую игру (не преферанс): дано непустое множество A на прямой, точки которой представлены в двоичном разложении, можно считать, что речь идет о множествах в $[0, 1]$. Игроки по очереди пишут 0 или 1, зная результаты предыдущих ходов. Если в конце пары полученная бинарная последовательность дает число из A, то выиграл первый, а если не из A, то вторая. Говорят, что для A один из играющих имеет выигрывающую стратегию, если можно может делать ходы, приводящие к победе. Например, если A состоит из одной точки $a = (a_i)$, то второй играющий выигрывает, просто заменив a_2. Ясно, что так же можно действовать для конечных множеств. Первый же может выиграть аналогично, если A есть дополнение одной точки. Множество A называется детерминированным, если один из играющих имеет выигрывающую стратегию. Аксиома (D): на матфаке все множества детерминированы. Можно доказать, что тогда на матфаке все множества измеримы по Лебегу. Впрочем, возможен иной взгляд на вещи: можно считать, что признаются за множества лишь детерминированные множества. Тут невозможно спорить, ведь неизвестно, что такое множество.

§ 1.5. Пополнение мер и классическая мера Лебега

Выше уже говорилось, что специальная σ-алгебра $\mathcal{A}_\mu$, возникшая из алгебры $\mathcal{A}$, может быть шире наименьшей σ-алгебры $\sigma(\mathcal{A})$, содержащей $\mathcal{A}$. Скажем, для меры Дирака в нуле на σ-алгебре в $[0,1]$, состоящей из нуля, пустого множества и всего отрезка, σ-алгебра $\mathcal{A}_\mu$ есть класс всех множеств в отрезке. Но сколь велика разница в смысле меры? Ответ очень простой.

1.5.1. Предложение. *Пусть μ — счетно-аддитивная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}_\mu$ есть класс множеств вида $A \cup Z$, где $A \in \mathcal{A}$ и $\mu^*(Z) = 0$, т.е. к $\mathcal{A}$ надо добавить всевозможные подмножества множеств меры нуль из $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Ясно, что указанные множества лежат в $\mathcal{A}_\mu$. Пусть теперь $E \in \mathcal{A}_\mu$. Для всякого k найдется множество $A_k \in \mathcal{A}$ с $E \subset A_k$ и $\mu(A_k) \leqslant \mu^*(E) + 1/k$. Это ясно из определения внешней меры. Тогда $A = \bigcap_k A_k \in \mathcal{A}$, $E \subset A$, $\mu(E) = \mu^*(E) = \mu(A)$. Аналогично для $X \backslash E$ находим $B \in \mathcal{A}$ с $X \backslash E \subset B$ и $\mu(X \backslash E) = \mu(B)$. Для $D = X \backslash B$ получаем $D \in \mathcal{A}$, $D \subset E \subset A$,

$$\mu(D) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(E) = \mu(A).$$

Итак, $Z = E \backslash D \subset A \backslash D \in \mathcal{A}$, $E = D \cup Z$, $\mu(A \backslash D) = 0$. $\square$

Введенное выше множество $A \in \mathcal{A}$ для E существует для всякого множества E, даже неизмеримого. Оно называется измеримой оболочкой E. Такое множество не одно, но все они имеют равную меру $\mu^*(E)$, причем минимальны в том смысле, что между E и A нет множеств из $\mathcal{A}$ положительной меры.

Мера μ на $\mathcal{A}_\mu$ полна в том смысле, что в $\mathcal{A}_\mu$ входят и все подмножества множеств меры нуль, чего могло не быть на исходной σ-алгебре. Поэтому $\mathcal{A}_\mu$ называют также лебеговским пополнением $\mathcal{A}$ относительно меры μ.

Из доказанного следует, что если применять теорему о продолжении к $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$, то расширения не произойдет, т.е. $(\mathcal{A}_\mu)_\mu = \mathcal{A}_\mu$. Однако это отнюдь не означает, что нельзя продолжить μ на еще более широкую σ-алгебру. Например, если меру Лебегу рассмотреть на σ-алгебре в $[0,1]$ из множеств меры нуль и их дополнений, то сразу получится полная мера, но ее можно продолжить на всю σ-алгебру измеримых множеств, хотя и не с помощью внешней меры.

В качестве задачи полезно доказать, что если дано множество E не из σ-алгебры, на которой задана мера μ, то эту меру можно продолжить на σ-алгебру, порожденную $\mathcal{A}$ и дополнительным множеством E.

Классическая мера Лебега на отрезке прямой или на кубе в $\mathbb{R}^n$ задается как результат применения предыдущих построений к обычному объему на алгебре $\mathcal{A}$ конечных объединений произведений промежутков $P = J_1 \times \cdots \times J_n$ в $[0,1]^n$, где J_i — промежутки из $[0,1]$. Функция $\lambda_n(P) := \lambda(J_1) \times \cdot \times \lambda(J_n)$, заданная на таких произведениях и продолженная по аддитивности на их дизъюнктные конечные объединения, счетно-аддитивна, ибо обладает приближающим компактным классом из компактных множеств. Теорема о продолжении дает счетно-аддитивную меру λ_n на σ-алгебре $\mathfrak{L}_n([0,1]^n)$ измеримых по Лебегу множеств в кубе. Эта σ-алгебра включает борелевскую σ-алгебру куба. Описанное продолжение называется мерой Лебега на кубе.

Из сказанного выше явствует, что для всякого измеримого по Лебегу множества A верно равенство

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon K \text{ — компакт в } A.\}$$

Если сначала как-то задать меру Лебега на компактах, то в принципе так можно определять ее дальше.

Аналогично вводятся измеримые по Лебегу множества и мера Лебега на всяком кубе $[-N,N]^n$. Теперь можно ввести σ-алгебру $\mathfrak{L}_n$ всех измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$, состоящую из множеств, пересечения которых с кубами измеримы.

Чтобы ввести еще и меру Лебега на $\mathfrak{L}_n$ заметим, что точно так же, как для числовых функций, можно ввести понятие счетно-аддитивной меры со значениями в $[0,+\infty]$, полагая, что сумма с бесконечностью есть бесконечность. Такие меры будет называть именно мерами со значениями в $[0,+\infty]$, а термин «мера» сохраним для конечных мер.

Счетно-аддитивная в этом смысле мера Лебега λ_n на $\mathfrak{L}_n$ задается формулой

$$\lambda_n(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A \cap K_j),$$

где K_j — целочисленные сдвиги единичного куба $[0,1]^n$. Эти сдвиги могут пересекаться, но пересечения имеют нулевую меру. В качестве упражнения надо убедиться, что и правда получена счетно-аддитивная мера на σ-алгебре.

Из определения очевидно, что мера Лебега инвариантна при сдвигах: сдвиг измеримого множества A на вектор h измерим и

$$\lambda_n(A+h) = \lambda_n(A).$$

Этим свойством мера Лебега задается однозначно с точностью до множителя.

1.5.2. Лемма. *Если борелевская мера* μ *на* $I = [0,1]^n$ *такова, что* $\mu(B) = \mu(B+h)$ *для всех таких* $B \in \mathcal{B}(I)$ *и* h*, что* $B \subset I$*,* $B+h \subset I$*, то* $\mu = c\lambda_n$ *при некотором* c*.*

Доказательство. Из счетной аддитивности и инвариантности ясно, что грани кубов имеют нулевую μ-меру (куб содержит бесконечное число сдвигов грани). Поэтому значение $c = \mu(I)$ однозначно определяет значения меры μ на кубах вида $2^{-kn}I + h$ из I, полученных как произведения промежутков длины 2^{-k} после деления $[0,1]$ на 2^k промежутков равной длины (промежутки могут быть замкнутыми, открытыми, полуоткрытыми, поэтому кубы могут быть без части граней, ребер или вершин). Тем самым мера μ совпадает с мерой $c\lambda_n$ на алгебре конечных объединений кубов указанного вида. Тогда равенство остается в силе и на порожденной этой алгеброй σ-алгебре, а это борелевская σ-алгебра. $\square$

1.5.3. Следствие. *Мера Лебега — единственная с точностью до множителя счетно-аддитивная мера со значениями в* $[0,+\infty]$ *на борелевской* σ*-алгебре в* $\mathbb{R}^n$*, инвариантная при сдвигах и конечная на* $[0,1]^n$.

Из этого вытекает, что единственность имеет место и на $\mathcal{L}_n$.

В качестве задачи (предлагавшейся в свое время на питерской городской олимпиаде для школьников) предлагается доказать такой интересный факт.

1.5.4. Теорема. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое конечное число дизъюнктных шаров в* $[0,1]$*, что их суммарный объем больше* $1-\varepsilon$*.*

1.5.5. Следствие. *Всякое непустое открытое множество в* $\mathbb{R}^n$ *с точностью до множества меры нуль есть объединение последовательности дизъюнктных шаров.*

Шары в этом утверждении можно брать открытые или замкнутые. В качестве задачи докажите, что $\mathbb{R}^n$ нельзя представить в виде точного объединения замкнутых шаров с ненулевыми радиусами и попарно не пересекающимися внутренностями (такая задача предлагалась жюри на одной из последних студенческих олимпиад СССР, где уровень участников, среди которых был Г. Перельман, позволял надеяться на получение решения).

Из приведенного факта вытекает, что в определении внешней меры Лебега вместо покрытий кубами можно использовать покрытия шарами. Действительно, каждый куб из покрытия можно покрыть конечным набором шаров с суммой объемов, сколь угодно близкой к объему куба.

Отметим следующий простой и полезный факт.

1.5.6. Лемма. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу. Тогда для всякого липшицевого с постоянной L отображения F множество $F(A)$ измеримо и*

$$\lambda_n(F(A)) \leqslant L^n \lambda_n(A).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть ограниченные множества. В силу сказанного выше множество A есть объединение последовательности компактов и множества меры нуль. Образ компакта при F компактен, поэтому достаточно показать, что F переводит множества меры нуль в множества меры нуль. Пусть $\lambda_n(E) = 0$ и $\varepsilon > 0$. Покроем E кубами B_j с ребрами r_j и $\sum_j r_j^n \leqslant \varepsilon$. Тогда $F(B_j)$ лежит в шаре радиуса не более $Ln^{1/2}r_j$, т.е. в кубе с ребром $2Ln^{1/2}r_j$. Это дает $\lambda_n(F(E)) \leqslant 2^n L^n n^{n/2}\varepsilon$, откуда $\lambda_n(F(E)) = 0$. Итак, $F(A)$ измеримо. Чтобы доказать оценку для мер, надо применить упомянутую выше возможно вычислять внешние меры по покрытиям шарами, ибо для шара эта оценка очевидна. □

1.5.7. Следствие. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу. Тогда множества αA и $U(A)$ для всяких числа α и ортогонального оператора U измеримы, причем*

$$\lambda_n(\alpha A) = |\alpha|^n \lambda_n(A), \quad \lambda_n(U(A)) = \lambda_n(A).$$

Более того, для всякого линейного оператора T имеем

$$\lambda_n(T(A)) = |\det T| \lambda_n(A).$$

Доказательство. Первые два утверждения следуют из результата о единственности меры Лебега, если заметить, что левые части равенств задают инвариантные борелевские меры (для этого нужна вытекающая из первого утверждения леммы измеримость αA и $U(A)$, оценка из лемма здесь не нужна). Последнее утверждение аналогично, но в нем для нахождения множителя пропорциональности еще полезно заметить, что невырожденный оператор есть композиция ортогональных операторов и растяжений по осям. □

Глава 2

Интеграл Лебега

§ 2.1. Определение интеграла Лебега

Пусть дана мера μ на пространстве X с σ-алгеброй $\mathcal{A}$, в качестве которой может быть взята и $\mathcal{A}_\mu$. Задание меры на множествах позволяет естественным образом ввести интеграл на функциях с конечным числом значений, принимаемых на множествах из $\mathcal{A}$, т.е. функциях вида

$$f(x) = c_1 I_{A_1}(x) + \cdots + c_n I_{A_n}(x),$$

где c_i — числа, $A_i \in \mathcal{A}$, I_A — индикатор множества A, т.е.

$$I_A(x) = 1 \text{ при } x \in A, \quad I_A(x) = 0 \text{ при } x \notin A.$$

Такие функции называют простыми. Конечно, они не такие уж простые, так как множества A_i могут быть сложными. Не следует путать эти функции со ступенчатыми на отрезки — те еще проще.

Для простой функции f ее интеграл Лебега задается формулой

$$\int_X f\,d\mu := \int_X f(x)\,\mu(dx) := \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i).$$

Функцию f можно разными способами записать в указанном виде, но легко проверить с помощью аддитивности меры, что указанная сумма от этого не зависит. Поэтому можно использовать представление, в котором все c_i различны (т.е. это все значения, взятые один раз), а множества A_i дизъюнктны (это не предполагается заранее).

Простые функции — функции с конечным числом значений с измеримыми прообразами значений. Уже на этом этапе интеграл Лебега приписывает интеграл неинтегрируемым по Риману функциям, например функции Дирихле (равной 1 на множестве рациональных чисел и 0 на иррациональных). Такая функция проста с точки зрения Лебега, ее интеграл равен нулю.

Естественность такого введения интеграла при заданной мере состоит в том, что желательно иметь интеграл, линейный по f и дающий меру множества на ее индикаторе. Тем самым никак иначе на простых не задать. Но как продолжить инте6грал на более сложные функции? Здесь очень важной оказывается концепция измеримой функции.

2.1.1. Определение. *Функция f на пространстве X с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ называется измеримой относительно $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}$-измеримой, если*

$$\{x\colon f(x) < c\} \in \mathcal{A} \quad \text{для всех чисел } c.$$

Здесь очень важен квантор «для всех». Иногда вместо этого говорят «для любого» c, после чего многие сдающие экзамен думают, что достаточно взять какое-то c, какое им любо. Но нет, надо именно для всякого!

Обратим внимание, что в определении измеримости никаких мер нет, только их потенциальные области определения!

Ниже мы проверим, что для измеримой функции f ее положительная и отрицательная части

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \max(-f, 0)$$

тоже измеримы.

Теперь введем интеграл Лебега для $\mathcal{A}$-измеримых функций.

2.1.2. Определение. *Для $\mathcal{A}$-измеримой функции $f \geqslant 0$ положим*

$$\int_X f\,d\mu = \sup_\varphi \int_X \varphi\,d\mu,$$

где $\sup$ *берется по всем простым функциям $\varphi \leqslant f$. Функция f называется интегрируемой, если этот* $\sup$ *конечен.*

Знакопеременная функция $f = f^+ - f^-$ называется интегрируемой, если таковы f^+ и f^-, а ее интеграл есть разность их интегралов:

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu.$$

Сразу обратим внимание на то, что в этом определении нет никаких «если что-то от чего-то не зависит»: здесь сразу никто ни от кого не зависит, интеграл неотрицательной функции всегда есть, либо бесконечный, либо конечный (как сумма неотрицательного ряда), в последнем случае функция объявляется интегрируемой. Для знакопеременной функции отдельно рассматриваются две функции, тоже нет никаких «условностей».

Наконец, сделаем еще один технический шаг, в котором в измеримости все же появляется мера.

Будем говорить, что некоторое свойство точек выполнено почти всюду относительно меры μ или μ-п.в., если множество точек без этого свойства входит в $\mathcal{A}_\mu$ и имеет меру нуль.

Например, можно сказать, что функция почти всюду определена или почти всюду неотрицательна.

Подмножество $E \subset X$ можно наделить следовой σ-алгеброй $\mathcal{A}|_E$, состоящей из пересечений $A \cap E$, где $A \in \mathcal{A}$. Тем самым E превращается тоже в измеримое пространство.

2.1.3. Определение. *Будем называть μ-измеримой такие функции f, что f определена вне некоторого множества Z меры нуль и измерима в указанном выше смысле на $X \backslash Z$ относительно $\mathcal{A}_\mu|_{X\backslash Z}$.*

Смысл этого шага — разрешить функции не быть определенной на множестве меры нуль, т.е. рассматривать п.в. определенные функции. В главном определении никаких мер не было, функция должна была быть всюду задана. Теперь это слегка ослабили. При этом не требуется как-то принудительно доопределять не всюду заданную функцию или переопределять, если у нее где-то было бесконечное значение — такие значения не считаем значениями, они возможно лишь на множестве меры нуль. Тем самым всюду равная бесконечности функция у нас не считается функцией.

2.1.4. Определение. *Причислим к интегрируемым такие μ-измеримые функции, которые которые интегрируемы в указанном смысле на своей области определения.*

В качестве задаче следует проверить, что μ-измеримая функция станет $\mathcal{A}_\mu$-измеримой после доопределения ее произвольными числовыми значениями (скажем, нулем) на множестве меры нуль, где она не была определена. Как легко проверить (это следует из нижеследующего) значения интеграла и сам факт его существования от этого не зависят.

§ 2.2. Свойства измеримых функций

Этот параграф имеет технический характер — проверяются основные свойства измеримых функций. Даже если считать, что все функции измеримы по Лебегу, то такая проверка необходима, поскольку часто приходится иметь дело с борелевскими функциями или функциями, измеримыми относительно иных сигма-алгебр.

2.2.1. Определение. *Функция f на топологическом пространстве X называется борелевской или измеримой по Борелю, если она измерима относительно борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(X)$, т.е. наименьшей σ-алгебры, содержащей все открытые множества.*

Например, непрерывная функция f измерима по Борелю, ибо множества $\{x\colon f(x) < c\}$ открыты.

2.2.2. Лемма. *Функция f измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ в точности тогда, когда $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Класс множеств

$$\mathcal{E} = \{E \in\in \mathcal{B}(\mathbb{R})\colon f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

является σ-алгеброй для какой угодно функции. Проверка — обязательное упражнение. Если f измерима, то $\mathcal{E}$ содержит лучи, а тогда и наименьшую сигма-алгебру, содержащую лучи, а это борелевская сигма-алгебра. Значит, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Обратное очевидно. $\square$

2.2.3. Теорема. (i) *Для всякой $\mathcal{A}$-измеримой функции f композиция $g \circ f$ тоже $\mathcal{A}$-измерима для всякой борелевской функции g.*

(ii) *Линейные комбинации и произведения $\mathcal{A}$-измеримых функций $\mathcal{A}$-измеримы.*

(iii) *Если $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где f_n $\mathcal{A}$-измеримы, то f тоже $\mathcal{A}$-измерима.*

Доказательство. (i) Имеем $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$ для всякого борелевского B, ибо $g^{-1}(B)$ тоже борелевское, поэтому применима лемма.

(ii) Достаточно проверить, что сумма $\mathcal{A}$-измеримых f и g измерима. Легко проверить (проверьте!), что

$$\{x\colon f(x) + g(x) < c\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x\colon f(x) < c - r,\ g(x) < r\}.$$

В правой части стоит счетное объединение пересечений множеств из $\mathcal{A}$. Теперь измеримость fg следует из равенства

$$fg = ((f+g)^2 - f^2 - g^2)/2,$$

где квадраты измеримы в силу (i) с учетом борелевости непрерывной функции $t \mapsto t^2$.

(iii) Аналогично предыдущему (снова нужна проверка!) имеем

$$\{x\colon f(x) < c\} = \bigcup_{k\geqslant 1} \bigcup_{N\geqslant 1} \bigcap_{n\geqslant N} \{x\colon f_n(x) < c - 1/k\},$$

где множество в скобках входит в $\mathcal{A}$. □

Из доказанного вытекает, что и частное f/g измеримых функций измеримо, если $g \neq 0$. Для этого надо проверить лишь измеримость $1/g$, что легко сделать по определению, но можно и сослаться на (i), заметив, что функция $\varphi(t) = 1/t$, $\varphi(0) = 0$ борелева.

Вот еще одно описание измеримых функций.

2.2.4. Следствие. *Функция f является $\mathcal{A}$-измеримой в точности тогда, когда она есть поточечный предел простых функций.*

При этом для ограниченной функции эти простые можно взять равномерно сходящимися, а для неотрицательной поточечно возрастающими к ней.

Доказательство. Приближения строятся банально и явно (что очень важно для интеграла Лебега: делим прямую (или отрезок, в который попадают значения) на промежутки вида $[k2^{-n}, k2^{-n}+2^{-n})$, т.е. $[0, 2^{-n})$ и т.д., и задаем f_n так:

$$f_n(x) = k2^{-n} \quad \text{при} \quad f(x) \in [k2^{-n}, k2^{-n} + 2^{-n}).$$

Множества $f^{-1}([k2^{-n}, k2^{-n} + 2^{-n}))$ входят в $\mathcal{A}$, на них f_n постоянна, поэтому $\mathcal{A}$-измерима (а почему?). Наконец, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2^{-n}$ для всех x. Для ограниченной функции сразу получены простые функции, а в общем случае возьмем простые g_n так: $g_n(x) = f_n(x)$ при $|f_n(x)| \leqslant 2^n$, $g_n(x) = 0$ при $|f_n(x)| > 2^n$. Проверьте, что получилось то, что нужно. □

В качестве несложных задач предлагается доказать следующее утверждение.

2.2.5. Предложение. *Пусть f_n — $\mathcal{A}$-измеримые функции. Если в каждой точке x последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена, то $\mathcal{A}$-измеримы функции*

$$\inf_n f_n(x), \quad \sup_n f_n(x).$$

Кроме того, множество всех точек, где есть конечный предел чисел $f_n(x)$, входит в $\mathcal{A}$.

В теории интеграла очень важны две следующие именные теоремы.

2.2.6. Теорема. (Теорема Д.Ф. Егорова) *Пусть μ — конечная мера на $\mathcal{A}$ и $f(x) = \lim f_n(x)$ для каждого x, причем f_n $\mathcal{A}$-измеримы. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $X_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что $\mu(X\backslash X_\varepsilon) < \varepsilon$ и на X_ε сходимость равномерна.*

Доказательство. Перейдя к $f - f_n$, можно считать, что $f = 0$. Тогда для каждого x и каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется такой номер N, что $|f_n(x)| \leqslant 2^{-k}$ при всех $n \geqslant N$. Множества

$$X_{k,N} = \{x\colon |f_n(x)| \leqslant 2^{-k}\ \forall\, n \geqslant N\}$$

входят в $\mathcal{A}$ и возрастают к X. Поэтому $\mu(X_{k,N}) \to \mu(X)$, т.е. найдется N_k с $\mu(X\backslash X_{k,N_k}) < \varepsilon 2^{-k}$. Множество

$$X_\varepsilon = X\backslash\Big(X\backslash\bigcup_k X_{k,N_k}\Big) = \bigcap_k X_{k,N_k}$$

входит в $\mathcal{A}$, $\mu(X\backslash X_\varepsilon) < \varepsilon$ и сходимость на нем равномерна. В самом деле, для заданного $\delta > 0$ найдем такое k, что $2^{-k} < \delta$. Так как $X_\varepsilon \subset X_{k,N_k}$, то при $n \geqslant N_k$ имеем $|f_n(x)| \leqslant 2^{-k}$. $\square$

Ясно, что из доказанного сразу следует такая модификация: то же самое верно для μ-измеримых функций, которые сходятся μ-почти всюду.

Закончим этот параграф следующей важной теоремой. Те, кто еще помним, что такое полное сепарабельное метрическое пространство, могут считать, что оно фигурирует вместо $\mathbb{R}$.

2.2.7. Теорема. (Теорема Н.Н. Лузина) *Пусть μ — конечная борелевская мера на прямой. Функция f является μ-измеримой в точности тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт K_ε с $\mu(\mathbb{R}\backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$, что сужение f на K_ε непрерывно. При этом найдется непрерывная функция g на $\mathbb{R}$, для которой $\mu(x\colon f(x) \neq g(x)) < \varepsilon$.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать это для ограниченных функций (взяв гомеоморфизм между прямой и интервалом). Кроме того, достаточно рассматривать f и μ на отрезке $[a,b]$ (сразу взяв отрезок с мерой, близкой к мере прямой). Пусть f $\mathcal{A}$-измерима. Доопределим f нулем на множестве меры нуль, где она могла быть не определена. Как показано выше, есть равномерно сходящаяся к f последовательность простых функций f_n. Каждая функция f_n постоянна на неких дизъюнктных измеримых множествах $A_{n,k} \subset [a,b]$, $k \leqslant N_n$. Впишем в $A_{n,k}$ компакт $K_{n,k}$ так, что μ-мера разности $\bigcup_k A_{n,k} = [a,b]$

и $S_n = \bigcup_k K_{n,k}$ стане меньше $\varepsilon 2^{-n}$. На компакте S_n функция f_n непрерывна. Значит, на их пересечении S непрерывны сразу все функции f_n, что дает и непрерывность их равномерного предела f. При этом $\mu([a,b]\backslash S) \leqslant \sum_n \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon$. Наконец, можно продолжить f с S на $\mathbb{R}$ до непрерывной функции (это обычно откуда-то знают, то ли из анализа, то ли из топологии, а кто не знает, должен сделать в качестве упражнения).

Теперь надо еще доказать обратное. Почему f измерима, если есть такие компакты? В этом случае прямая исчерпывается последовательностью таких компактов K_n с точностью до множества меры нуль. Тогда множество $\{x\colon f(x) < c\}$ лишь множеством меры нуль может отличаться от счетного объединения множеств $\{x \in K_n\colon f(x) < c\}$, которые из-за непрерывности f на K_n представляют собой пересечения K_n с открытыми множествами (открытые подмножества пространства K_n есть его пересечения с открытыми на прямой), т.е. это борелевские множества. □

§ 2.3. Свойства интеграла Лебега

Из определения интеграла Лебега следует, что две почти всюду равные функции либо одновременно интегрируемы, либо нет, причем их интегралы совпадают в случае интегрируемости. Это достаточно проверить для неотрицательных функций, когда нужное равенство следует из того, что если φ и ψ — простые функции и $\varphi \leqslant \psi$ почти всюду, то интеграл от φ не больше интеграла от ψ.

Из определения сразу следует, что если f и g интегрируемы и $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int_X f\,d\mu \leqslant \int_X g\,d\mu.$$

Более того, если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, где f и g измеримы и g интегрируема, то определение влечет и интегрируемость f. Из неравенства выше вытекает оценка для ограниченных функций:

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leqslant \sup_x |f(x)|\,\mu(X).$$

Кроме того, из этого же вытекает одно из важнейших неравенств теории интеграла:

НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЁВА: если f интегрируема, то

$$\mu(x\colon\ |f(x)| \geqslant R) \leqslant \frac{1}{R}\int_X |f|\,d\mu, \quad R > 0.$$

В самом деле, $R\mu(x\colon\ |f(x)| \geqslant R)$ есть интеграл от простой функции g, равной R на множестве $\{x\colon\ |f(x)| \geqslant R\}$ и 0 вне его. При этом $g \leqslant |f|$.

Еще отметим, что если $f \geqslant 0$ имеет нулевой интеграл, то $f(x) = 0$ почти всюду. В самом деле, множество $\mu(\{f \geqslant 1/n\}) = 0$, так как f не меньше простой функции $n^{-1}I_{f\geqslant 1/n}$ с интегралом $n^{-1}\mu(\{f \geqslant 1/n\}) > 0$. При этом $\{f > 0\} = \bigcup_n \{f \geqslant 1/n\}$. Конечно, сказанное следует и из неравенства Чебышёва.

Однако при нашем определении интеграла неочевидна его линейность по функции (ниже приведены равносильные определения, при которых линейность более очевидна, а также другие, при которых еще менее очевидна). Линейность будет получена из следующей леммы, которая полезна тем, что при вычислении интеграла позволяет перебирать не все простые функции меньше данной неотрицательной, а взять какую-либо возрастающую к ней последовательность.

2.3.1. Лемма. *Пусть $f \geqslant 0$ интегрируема и f_n — простые, причем $f_n(x)$ возрастает к $f(x)$ почти всюду. Тогда интеграл от f есть предел интегралов от f_n.*

Доказательство. Переопределив на множестве меры нуль, считаем, что сходимость есть всюду. Интегралы от f_n возрастают к некоторому числу I не больше интеграла $I(f)$ от f. Проверим, что $I = I(f)$. В противном случае найдется простая функция $\varphi \leqslant f$, для которой интеграл равен $I + \varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Заметим, что функции $\varphi_n = \min(f_n, \varphi)$ являются простыми и возрастают к φ, ибо для тех x, где $\varphi(x) < f(x)$, при всех достаточно больших n имеем $\varphi_n(x) = \varphi(x)$. Найдется такое $M > 0$, что $|\varphi_n| \leqslant M$, $|\varphi| \leqslant M$. Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме Егорова найдется такое измеримое множество X_ε с $\mu(X\backslash X_\varepsilon) < \varepsilon/(4M)$, на котором сходимость равномерна, т.е. $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \varepsilon/(2 + 2\mu(X)$ при $n \geqslant N$ для некоторого N. Для простых функций линейность интеграла очевидна, поэтому интеграл по X есть сумма интегралов по X_ε и $X\backslash X_\varepsilon$. Интегралы от φ_n и φ по $X\backslash X_\varepsilon$ не больше $\varepsilon/4$. Интегралы по X_ε отличаются менее, чем на на $\varepsilon/2$, что дает противоречие. □

2.3.2. Следствие. *Если f и g интегрируемы и неотрицательны, то $f + g$ интегрируема и*

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Доказательство. Выше было показано, что f и g есть пределы возрастающих последовательностей простых функций f_n и g_n соответственно, тогда $f+g$ есть предел f_n+g_n, причем такие же соотношения верны и для интегралов. □

Теперь можно доказать линейность интеграла в полном объеме.

2.3.3. Предложение. *Если f и g интегрируемы, то $\alpha f+\beta g$ интегрируема для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и*

$$\int_X (\alpha f+\beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu.$$

Доказательство. Если $g=0$, то утверждение сводится к $f \geqslant 0$ и доказывается так же, как следствие выше. Поэтому можно считать, что $\alpha=\beta=1$. Так как $f=f^+-f^-$, $g=g^+-g^-$, то $f+g=f^++g^+-(f^-+g^-)$. Для f^++g^+ и f^-+g^- все уже доказано, поэтому остается разобрать случай, когда $f \geqslant 0$, $g \leqslant 0$, т.е. случай разности неотрицательных функций. Эта функция интегрируема, ибо $|f-g| \leqslant f+g$. На множестве $Y := \{x\colon f(x) \geqslant g(x)\}$ имеем $(f-g)^+ = f-g$ и $(f-g)^-=0$, на $X\backslash Y$ имеем $(f-g)^- = g-f$ и $(f-g)^+=0$. Значит,

$$\int_X (f-g)^+\, d\mu = \int_X (f-g) I_Y\, d\mu = \int_X f I_Y\, d\mu - \int_X g I_Y\, d\mu,$$

ибо на Y имеем $f=f-g+g$ и $f-g \geqslant 0, g \geqslant 0$. Аналогично

$$\int_X (f-g)^-\, d\mu = \int_X (g-f) I_{X\backslash Y}\, d\mu = \int_X g I_{X\backslash Y}\, d\mu - \int_X f I_{X\backslash Y}\, d\mu.$$

По доказанному

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f I_Y\, d\mu + \int_X f I_{X\backslash Y}\, d\mu,$$

$$\int_X g\, d\mu = \int_X g I_Y\, d\mu + \int_X g I_{X\backslash Y}\, d\mu.$$

Из этих соотношений вытекает нужное равенство. □

Для всякого измеримого множества A и всякой интегрируемой функции f положим

$$\int_A f\, d\mu = \int_X f I_A\, d\mu.$$

Из доказанного следует, что это то же самое, что интеграл от f по самостоятельному пространству A с ограниченной на него мерой.

Закончим этот раздел важной теоремой.

2.3.4. Теорема. (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега) *Пусть функция f интегрируема по мере μ. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$\int_A |f|\,d\mu \leqslant \varepsilon \quad \textit{при } \mu(A) \leqslant \delta.$$

Доказательство. Найдем такую простую функцию φ, что $0 \leqslant \varphi \leqslant |f|$ почти всюду и

$$\int_X \varphi\,d\mu \geqslant \int_X |f|\,d\mu - \varepsilon/2.$$

Возьмем $\delta = \varepsilon/(2M+2)$, $M = \max_x \varphi(x)$. При $\mu(A) \leqslant \delta$ имеем

$$\int_A |f|\,d\mu = \int_A \varphi\,d\mu + \int_A (|f| - \varphi)\,d\mu \leqslant M\mu(A) + \int_X (|f| - \varphi)\,d\mu \leqslant \varepsilon,$$

ибо $M\mu(A) \leqslant M\delta \leqslant \varepsilon/2$. □

§ 2.4. Предельный переход в интеграле Лебега

Пусть интегрируемые функции f_n сходятся почти всюду к функции f. Когда f интегрируема и когда ее интеграл равен пределу интегралов от f_n?

Ясно, что без дополнительных условий этой неверно: всякая измеримая функция есть предел простых, но даже если она интегрируема, то ее интеграл может отличаться от предела интегралов f_n и в том случае, когда он есть, а ведь его может и не быть. Скажем, простые функции $f_n = nI_{(0,1/n]}$ на $[0,1]$ сходятся к нулю и имеют интегралы 1 по мере Лебега. Чтобы исправить дело, нужные какие-то оценки. Следующие три базовые теоремы различаются этими оценками.

ВО ВСЕХ ТРЕХ ЕСТЬ ОБЩЕЕ УСЛОВИЕ:

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{почти всюду, } f_n \text{ интегрируемы.}$$

2.4.1. Теорема. (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости) *Пусть есть интегрируемая* Φ (*общая мажоранта*), *для которой для каждого n*

$$|f_n(x)| \leqslant \Phi(x) \quad \textit{п.в.}.$$

Тогда f интегрируема, причем

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu, \quad \lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|\,d\mu = 0.$$

2.4.2. Теорема. (Теорема Беппо Леви о монотонной сходимости) *Пусть* $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ *п.в. для каждого* n. *Если*

$$\sup_n \int_X f_n \, d\mu < \infty,$$

то верно заключение предыдущей теоремы.

2.4.3. Теорема. (Теорема Фату) *Пусть* $f_n(x) \geqslant 0$ *п.в. для каждого* n. *Если*

$$\sup_n \int_X f_n \, d\mu < \infty,$$

то f *интегрируема и*

$$\int_X f \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

но равенства может не быть.

Заметим, что в условии нет разницы верно ли нечто почти всюду для каждого отдельного n или сразу для всех n, ибо счетное объединение множеств меры нуль тоже имеет меру нуль.

В качестве упражнения полезно вывести каждую из этих теорем из каждой другой. Мы докажем теорему Лебега, а из нее вывод остальных тривиален. Впрочем, и сама теорема Лебега легко доказывается.

Доказательство теоремы Лебега. Модуль разности интегралов не больше интеграла от разности модулей, поэтому достаточно проверить второй утверждение. Оно сводится к случаю $f = 0$ переходом к $f_n - f$ (для них мажоранта 2Φ). Кроме того, можно считать, что $\mu(X) = 1$. Пусть $\varepsilon > 0$. Аболютная непрерывность интеграла дает такое $\delta > 0$, что

$$\int_A \Phi \, d\mu < \varepsilon \quad \text{при } \mu(A) < \delta.$$

Теорема Егорова дает множество X_δ с $\mu(X \backslash X_\delta) < \delta$, на котором сходимость равномерна. Значит, есть такое N, что $|f_n(x)|\varepsilon$ при всех $x \in X_\delta$ и $n \geqslant N$. При таких n интеграл от $|f_n|$ не больше

$$\int_{X_\delta} |f_n| \, d\mu + \int_{X\backslash X_\delta} |f_n| \, d\mu \leqslant \varepsilon + \int_{X\backslash X_\delta} \Phi \, d\mu \leqslant 2\varepsilon,$$

что показывает нужную сходимость. □

Доказательство теоремы Беппо Леви. Можно считать, что $f_n \geqslant 0$, взяв $f_n - f_1$. Тогда $f_n \leqslant f$. Покажем, что f интегрируема, тогда она будет мажорантой из теоремы Лебега. Интегралы от f_n не больше некоторого M. Проверим, что интеграл от f не больше M. Пусть φ — простая, $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Тогда функции $\min(f_n, \varphi)$ возрастают к φ, т.е. φ оказалась их интегрируемой мажорантной, значит, по теореме Лебега их интегралы стремятся к интегралу от φ. Эти интегралы не больше интегралов от f_n, поэтому они не больше M, а тогда интеграл φ не больше M. По определению интеграл от f не больше M. $\square$

Доказательство теоремы Фату. Функции $g_n = \inf_{k \geqslant n} f_n$ измеримы и возрастают почти всюду к f. При этом $g_n \leqslant f_n$, значит, интеграл от g_n не больше интеграла от f_n. По теореме о монотонной сходимости f интегрируема, причем ее интеграл равен пределу интегралов от g_n. Последний не больше $\liminf$ интегралов от f_n. $\square$

2.4.4. Замечание. Докажите в качестве задачи небольшое усиление теоремы Беппо Леви: пусть интегрируемые f_n почти всюду возрастают (возможно, к бесконечности), а их интегралы ограничены общей константой. Тогда их предел почти всюду конечен (что и предполагалось в основной теореме).

§ 2.5. Сходимость по мере

Помимо сходимости почти всюду и равномерной сходимости для измеримых функций полезно рассмотреть еще более слабый вид сходимости: сходимость по мере, называемая сходимостью по вероятности для вероятностных мер. В этом параграфе меры конечные.

2.5.1. Определение. *Измеримые функции f_n сходятся к измеримой функции f, если для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ имеем*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x\colon |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Конечно, это слабее, чем $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(x\colon |f(x) - f_n(x)| > 0) = 0$. Кроме того, здесь надо говорить именно «для каждого», а не «для любого», чтоб не вообразить, что достаточно иметь это равенство для какого-то ε, которое любо.

Из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду или хотя бы где-то. В качестве примера можно указать такую последовательность индикаторов отрезков: для каждого n делим $[0, 1]$ на отрезки $I_{n,k}$ длины 2^{-n}, записываем их индикаторы в единую последовательность вида $I_{1,1}$, $I_{2,1}$, $I_{2,2}$ и т.д. Для каждой точки x есть бесконечно много нулей и единиц среди значений в x этих индикаторов.

Однако из сходимости почти всюду сходимость по мере следует очевидным образом в силу теоремы Егорова.

Следующая теорема Рисса дает частичную компенсацию.

2.5.2. Теорема. *Если измеримые функции f_n сходятся к f по мере, то найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся почти всюду.*

Доказательство. Можно считать, что $f = 0$. Заметим, что

$$\int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\, d\mu \to 0,$$

ибо этот интеграл слагается из интегралов по множеству $\{|f_n| \geqslant \varepsilon\}$ и его дополнению и потому не больше $\mu\{|f_n| \geqslant \varepsilon\} + \varepsilon\mu(X)$, что меньше $\varepsilon(1+\mu(X))$ при достаточно больших n. Найдем возрастающие номера n_k, для которых

$$\int_X \frac{|f_{n_k}|}{1+|f_{n_k}|}\, d\mu \leqslant 2^{-k}.$$

Тогда из замечания, сделанного после теоремы Беппо Леви, следует, что ряд из $\frac{|f_{n_k}(x)|}{1+|f_{n_k}(x)|}$ сходится почти всюду. Последнее возможно лишь при $f_{n_k}(x) \to 0$. □

Из теоремы Рисса вытекает, что в теореме Лебега и теореме Фату вместо сходимости почти всюду можно требовать сходимость по мере.

§ 2.6. Критерии интегрируемости по Лебегу и связь с интегралом Римана

Удобные критерии интегрируемости по Лебегу формулируются в терминах рядов и интегралов Римана.

Сначала рассмотрим пример.

2.6.1. Пример. Пусть функция f принимает значения c_n на дизъюнктных измеримых множествах A_n. Тогда ее интегрируемость равносильна условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\mu(A_n) < \infty.$$

В случае интегрируемости

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\mu(A_n).$$

Доказательство. По определению все сводится к $c_n \geqslant 0$. Простые функции g_n, равные c_i на A_i при $i \leqslant n$ и 0 на остальных, возрастают к f, их интегралы — частичные суммы ряда, так что остается применить результаты предыдущего параграфа. □

2.6.2. Теорема. *Измеримая функция f интегрируема относительно конечной меры μ в точности тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(x\colon n \leqslant |f(x)| < n+1) < \infty.$$

Это равносильно также условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(x\colon |f(x)| \geqslant n) < \infty$$

или же интегральному условию

$$\int_0^{\infty} \mu(x\colon |f(x)| > t)\, dt < \infty.$$

Доказательство. Пусть $g(x) = n$ при $n \leqslant |f(x)| < n+1$, $n \geqslant 0$. Функция g измерима и $g \leqslant f \leqslant g+1$. Значит, интегрируемость g равносильна интегрируемости f. В силу примера первый ряд есть интеграл от g. Его сходимость равносильна сходимости второго ряда, ибо

$$\mu(|f| \geqslant n) = \mu(n \leqslant |f| < n+1) + \mu(n+1 \leqslant |f| < n+2) + \cdots .$$

Функция $t \mapsto \mu(x\colon |f(x)| > t)$ убывает, ее несобственный интеграл конечен в точности тогда, когда сходится первый ряд. $\square$

Из теории римановского интеграла известно, что функция f на отрезке интегрируема по Риману в точности тогда, когда она ограничена и почти всюду непрерывна.

Однако и без этого факта легко сравнить интегралы Римана и Лебега.

2.6.3. Теорема. (i) *Если f на $[a,b]$ интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и оба интеграла равны.*

(ii) *Это же верно, если f имеет абсолютный несобственный интеграл Римана. Однако если f имеет несобственный интеграл Римана, но не абсолютный, то она не интегрируема по Лебегу.*

Доказательство. (i) Пусть $[a,b] = [0,1]$. Пусть $n \geqslant 1$. Поделим отрезок точками $k/2^n$ и положим $f_n(x) = \inf_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})} f(x)$, $F_n(x) = \sup_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})} f(x)$. Тогда $f_n \leqslant f \leqslant F_n$, $f_n \leqslant f_{n+1}$, $F_{n+1} \leqslant F_n$. Функции f_n и F_n ступенчатые, их интегралы Римана равны интегралам Лебегам и стремятся к интегралу Римана от f. Функции $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ и $G = \lim\limits_{n\to\infty} F_n$ измеримы, причем $g \leqslant f \leqslant F$. Кроме того, интеграл Лебега от g есть предел интегралов (Лебега и Римана) от f_n, а интеграл от G есть предел интегралов от F_n, т.е. g и G имеют равные интегралы. Тогда $g = G$ п.в., откуда $f = g = G$ п.в. и верно равенство для интегралов.

(ii) Если $f \geqslant 0$ имеет несобственный интеграл Римана нуль — единственная особая точка, то функции $f_n = fI_{[1/n,1]}$ возрастаю к f, их интегралы Лебега равны римановским и стремятся к несобственному интегралу от f. По теореме Беппо Леви получаем доказываемое. Случай нескольких особых точек аналогичен. Так как $|f|$ должна быть интегрируемой по Лебегу вместе с f, то неабсолютно несобственно интегрируемая функция не будет интегрируемой по Лебегу (иначе римановские интегралы от $|f|I_{[1/n,1]}$ равномерно ограничены). □

§ 2.7. Неравенства для интегралов

В теории интеграла важную роль играют различные неравенства, среди которых особое место занимают неравенство Чебышёва (уже обсуждавшееся), неравенства Йенсена, Коши–Буняковского, Гёльдера и Минковского, о которых сейчас пойдет речь. Эти пять неравенства надо знать.

Напомним, что функция V на промежутке (a, b) (возможно, неограниченном) называется выпуклой, если

$$V(tx + (1-t)y) \leqslant tV(x) + (1-t)V(y) \quad \forall\, t \in [0,1],\ x, y \in (a,b).$$

Для дважды дифференцируемой функции V выпуклость равносильна неравенству $V'' \geqslant 0$.

По индукции проверяется, что

$$V(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1V(x_1) + \cdots + t_nV(x_n)$$

при $x_i \in (a,b)$, $t_i \geqslant 0$, $\sum_i t_i = 1$. s

Из выпуклости V вытекает, что найдется для всякого $u_0 \in (a,b)$ такое число α, что

$$V(u) \geqslant V(u_0) + \alpha(u - u_0) \quad \forall\, u \in (a,b).$$

В случае дифференцируемой функции можно взять $\alpha = V'(u_0)$.

Основные примеры выпуклых функций: x, $|x|$, $|x|^p$ при $p \geqslant 1$, e^x, e^{-x}, $e^{|x|}$, $x \ln x$ при $x > 0$.

2.7.1. Теорема. (Неравенство Йенсена) *Пусть μ — вероятностная мера на $(X, \mathcal{A})$ и f — μ-интегрируемая функция со значениями в интервале U (возможно, неограниченном), на котором задана* *выпуклая функция* V*, причем функция* $V(f)$ *интегрируема. Тогда*

$$V\Big(\int_X f(x)\,\mu(dx)\Big) \leqslant \int_X V\big(f(x)\big)\,\mu(dx). \tag{2.7.1}$$

В частности, если $\exp f$ *интегрируема, то*

$$\exp\Big(\int_X f(x)\,\mu(dx)\Big) \leqslant \int_X \exp f(x)\,\mu(dx),$$

а если $|f|^p$ *интегрируема при каком-то* $p > 1$*, то*

$$\Big(\int_X |f|\,d\mu\Big)^p \leqslant \int_X |f|^p\,d\mu.$$

Доказательство. Для упрощения будем считать, что $U = \mathbb{R}$, в качестве упражнения следует восстановить детали в общей случае. Как указано выше, есть такое число α, что $V(u) \geqslant V(u_0) + \alpha(u - u_0)$ для всех u, где в качестве u_0 берем интеграл от f. Поэтому

$$V\big(f(x)\big) \geqslant V(u_0) + \alpha\big[f(x) - u_0\big].$$

Проинтегрировав это неравенство по x, заметим, что интеграл от второго слагаемого в правой части равен нулю по определению u_0. □

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с конечной неотрицательной мерой μ и $p \in [1, \infty)$. Обозначим через $\mathcal{L}^p(\mu)$ множество всех μ-измеримых функций f, для которых $|f|^p$ — μ-интегрируемая функция. В частности, $\mathcal{L}^1(\mu)$ — множество всех μ-интегрируемых функций.

При $1 \leqslant p < \infty$ положим

$$\|f\|_p := \|f\|_{L^p(\mu)} := \Big(\int_X |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

2.7.2. Теорема. (Неравенство Гёльдера) *Пусть* $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$*, где* $1 < p < \infty$, $q = p(p-1)^{-1}$*. Тогда* $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *и* $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$*, т. е.*

$$\int_X |fg|\,d\mu \leqslant \Big(\int_X |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X |g|^q\,d\mu\Big)^{1/q}. \tag{2.7.2}$$

Доказательство. Функция fg определена п.в. и измерима. Нетрудно показать, что для всех неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (умеете?). Тогда

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Правая часть этого неравенства интегрируема, причем ее интеграл равен 1, поэтому левая часть также интегрируема и ее интеграл не превосходит 1, что равносильно (2.7.2). □

Последнее неравенство из теоремы с неравенством Йенсена — частный случай неравенства Гёльдера.

Непосредственным следствием неравенства Гёльдера является приводимое ниже *неравенство Коши–Буняковского*, которое, однако, можно легко доказать непосредственно.

2.7.3. Следствие. *Если* $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, *то* $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *и*

$$\int_X fg\,d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^2\,d\mu\right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2\,d\mu\right)^{1/2}. \tag{2.7.3}$$

2.7.4. Теорема. (Неравенство Минковского) *Предположим, что* $p \in [1, +\infty)$ *и* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. *Тогда* $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, *причем*

$$\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}. \tag{2.7.4}$$

Доказательство. Функция $f + g$ определена п.в. и измерима. При $p = 1$ неравенство (2.7.4) очевидно. При $p > 1$ выполнена оценка $|f + g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$, поэтому $|f + g|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Заметим, что

$$|f+g|^p \leqslant |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g|. \tag{2.7.5}$$

Поскольку $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^{p/(p-1)}(\mu) = \mathcal{L}^q(\mu)$, то в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\int_X |f+g|^{p-1}|f|\,d\mu \leqslant \left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/q} \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Оценив аналогичным образом интеграл от второго слагаемого в правой части (2.7.5), приходим к оценке

$$\int_X |f+g|^p\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1/q} \left[\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}\right].$$

Заметив, что $1 - 1/q = 1/p$, получаем $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. □

§ 2.8. Пространства интегрируемых функций

Линейное пространство X (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; считается, что все знают, что такое линейное пространство, но обычно почти никто не знает точного определения) называется нормированным, если на нем задана функция $x \mapsto \|x\|$, называемая нормой и удовлетворяющая условиям:

1) $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0$ лишь при $x = 0$,
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ для всех чисел λ и $x \in X$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ — неравенство треугольника.

Нормированное пространство становится метрическим с метрикой

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Проверка — полезное упражнение.

Нормированное пространство называется банаховым (в честь Стефана Банаха — Banach), если оно полно относительно указанной метрики. Например, пространство многочленов не банахово с равномерной нормой $\|f\| = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$, а пространство всех непрерывных функций на $[0, 1]$ банахово с этой нормой.

Важный частный случай нормированного пространство — евклидово пространство, т.е. линейное пространство E со скалярным произведением, иначе говоря, с функцией (x, y) на $E \times E$, линейной по каждому аргументу, для которой $(x, y) = (y, x)$, $(x, x) \geqslant 0$ и $(x, x) = 0$ лишь при $x = 0$. В комплексном случае вместо симметричности $(x, y) = \overline{(y, x)}$, а линейность только по первому аргументу. Норма евклидова пространства задается формулой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Неравенство треугольника выводится из неравенства Коши–Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|,$$

которое в свою очередь вытекает из неравенства $(x + ty, x + ty) \geqslant 0$ при всех t.

Полное евклидово пространство называется гильбертовым. Пространство многочленов со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) \, dt$$

является неполным евклидовым (докажите!).

Цель этого параграфа — устроить из пространств $\mathfrak{L}^p$ банаховы, а из $\mathfrak{L}^2$ гильбертово пространство. Пока что они даже не являются линейными (но чтобы это увидеть, надо знать определение линейного пространства, а раз все равно никто не знает, то не будет это проверять), да и с нормой проблема: на $\mathfrak{L}^1(\mu)$ хотелось бы задать норму формулой

$$\|f\|_1 = \int |f(x)|\,\mu(dx),$$

но ведь такой интеграл может быть нулевым не только для ненулевой функции, что запрещено условием для нормы. Аналогичная проблема с $\|f\|_p$ на $\mathfrak{L}^p$.

Выход такой: вместо $\mathfrak{L}^p(\mu)$ берется пространство $L^p(\mu)$ классов эквивалентности из $\mathfrak{L}^p(\mu)$, когда функции f и g считаются эквивалентными, если равны почти всюду. Легко проверить, что это отношение эквивлентности. Линейные операции над классами напрашиваются: сумма классов с представителями f и g есть класс с представителем $f+g$, где функции просто складываются во всех точках, где обе определены (напомним, что измеримые функции могут быть не определены на множестве меры нуль). Аналогично с умножением на число. Найдя определение линейного пространства в учебнике линейного алгебры, можно проверить, что $L^p(\mu)$ и правда линейное пространство.

Норма на $L^1(\mu)$ задается как $\|f\|_1$ для представителя класса эквивалентности (это не зависит от выбора представителя), на этот раз проблем нет, так как если интеграл от $|f|$ нулевой, то $f = 0$ почти всюду, т.е. это представитель нуля (с точки зрения L^1, но не $\mathfrak{L}^1$, все почти всюду нулевые функции отождествляются с тождественно нулевой). На $L^p(\mu)$ аналогично норма задается как $\|f\|_1$ для представителя класса эквивалентности, причем неравенство треугольника обеспечено неравенством Минковского.

Скалярное произведение в $L^2(\mu)$ задается формулой

$$(f, g)_2 = \int f(x)g(x)\,\mu(dx)$$

для представителей классов эквивалентности. В комплекном случае

$$(f, g)_2 = \int f(x)\overline{g}(x)\,\mu(dx).$$

Зачем сопряжение в комплексном случае? А как в $\mathbb{C}$: $z\overline{z} \geqslant 0$, но z^2 может быть каким угодно.

Хотя элементы L^p — классы эквивлентности, а не индивидуальные функции, обращаются с ними как с индивидуальными функциями и говорят «рассмотрим функцию f из L^2» вместо длинного «рассмотрим класс эквивлентности из L^2, представителем которого служит функция f».

Отметим, что сходимость f_n к f в L^1 влечет сходимость по мере в силу неравенства Чебышёва:

$$\mu(x\colon |f(x)-f_n(x)|\geqslant \varepsilon)\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_X |f-f_n|\,d\mu.$$

Однако сходимость почти всюду из этого не следует (см. пример выше, когда есть сходимость по мере, но нет поточечной).

2.8.1. Теорема. *При* $1\leqslant p<\infty$ *пространства* $L^p(\mu)$ *банаховы, а* $L^2(\mu)$ *гильбертово.*

Доказательство. Надо доказать, что фундаментальные последовательности сходятся. Начнем с $p=1$. Пусть f_n — представители классов данной фундаментальной последовательности. Это значит, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что

$$\int |f_n-f_k|\,d\mu\leqslant\varepsilon\quad \forall\, n,k\geqslant N.$$

Выберем возрастающие номера n_k так, что

$$\int |f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\,d\mu\leqslant 2^{-k}.$$

Достаточно доказать, что сходится $\{f_{n_k}\}$, ибо если в фундаментальной последовательности сходится подпоследовательность, то туда же сходится и вся последовательность. Поэтому можно считать, что $n_k=k$. Ряд из $\sum_k |f_{k+1}(x)-f_k(x)|$ сходится почти всюду в силу теоремы Беппо Леви (со сделанным после нее уточнением), так как сходится ряд из интегралов (теорема применяется к возрастающей последовательности частичных сумм). При этом сумма ряда есть интегрируемая функция Φ. Тогда почти всюду сходится и ряд без модулей $\sum_k |f_{k+1}(x)-f_k(x)|$. Его частичные суммы $\sum_{k\leqslant n-1}$ равны $f_n(x)-f_1(x)$. При этом $|f_n(x)-f_1(x)|\leqslant\Phi(x)$. Итак, $f_n(x)-f_1(x)$ сходятся п.в. к некоторой интегрируемой функции $g(x)$, тогда $f_n(x)$ сходятся к $f(x)=g(x)+f_1(x)$, причем $|f_n(x)|\leqslant\Phi(x)+|f_1(x)|$. По теореме Лебега интегралы от $|f_n-f|$ стремятся к нулю, т.е. получена сходимость в L^1 к классу, представителем которого является f.

Случай $p>1$ доказывается аналогично, но вытекает также из случая $p=1$: если $\{f_n\}$ фундаментальна в L^p, то из неравенства Гёльдера следует функцдаментальность в L^1 и сходимость в L^1 к некоторой функции f. Тогда есть и сходимость по мере. Фундаментальная последовательность ограничена в L^p, т.е. $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$. По теореме Фату $\|f\|_p < \infty$. Еще раз применяя теорему Фату, получаем, что $\|f_n - f\|_p \to 0$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ берем N так, что $\|f_n - f_k\|_p \leqslant \varepsilon$ при $n, k \geqslant N$. Теперь при $k \to \infty$ имеем $\|f_n - f\|_p \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$. □

Отметим, что множество простых функций всюду плотно в L^p: для каждой функции $f \in L^p(\mu)$ есть последовательность простых функций, сходящаяся к f в L^p. Для этого сначала приблизим f ограниченными функциями, взяв $f_n(x) = f(x)$ при $|f(x)| \leqslant n$, $f_n(x) = n$ при $f(x) > n$ и $f_n(x) = -n$ при $f(x) < -n$ (сходимость в L^p следует из теоремы Лебега). Ограниченные функции можно приближать простыми даже равномерно.

Из доказанного следует, что пространство $L^p(\mu)$ является пополнением множества простых функций (точнее, множества соответствующих классов эквивалентности) по норме $\|f\|_p$. В принципе так можно и определять эти пространства, но такое определение крайне неудачно. Ведь тогда еще надо отдельно доказывать, что элементы пополнения (как абстрактного пополнения метрического пространства) реализуются с помощью функций. Однако это определение можно модифицировать более удачно. Включим его в следующий список равносильных определений интегрируемости μ-измеримой функции f:

1) f интегрируема в смысле основного определения;

2) функции $\min(f^+, n)$ и $\min(f^-, n)$ имеют равномерно ограниченные интегралы, причем интеграл от ограниченной функции g вводится так: g есть равномерный предел простых g_n, тогда их интегралы имеют предел, который и берется в качестве интеграла от g;

3) при некотором $\varepsilon > 0$ сходится ряд $L(\varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon n \mu(x\colon \varepsilon n \leqslant f(x) < \varepsilon n + \varepsilon)$; тогда доказывается, что существует конченый предел $\lim\limits_{\varepsilon \to} L(\varepsilon)$, который принимается в качестве интеграла;

4) если $f \geqslant 0$, то интеграл от f есть несобственный интеграл Римана

$$\int_0^\infty \mu(x\colon f(x) > t)\, dt,$$

если он конечен; для знакопеременных отдельно рассматриваются f^+ и f^-;

5) существует последовательность простых функций f_n, которая сходится к f почти всюду и фундаментальна в $L^1(\mu)$.

В качестве задачи предлагается установить равносильность всех этих описаний.

В следующей главе будет еще равносильное описание

6) интеграл от функции $f \geqslant 0$ на $[a,b]$ есть двумерная мера множества точек $(x,y) \in [a,b] \times [0,+\infty)$ с $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, т.е. площадь под графиком f. Для абстрактной меры μ верно то же самое, но площадь надо измерять относительно произведения μ и меры Лебега.

§ 2.9. Бесконечные меры

Применительно к мере Лебега на $\mathbb{R}^n$ уже говорилось о бесконечных мерах, т.е. мерах на σ-алгебрах со значениями в $[0,+\infty]$, когда счетная аддитивность определяется аналогично случаю конечных мер с дополнительным соглашением $+\infty + c = +\infty$. Интеграл определяется точно также, но при этом в определении интеграла от $f \geqslant 0$ берутся не какие угодно простые функции φ, а лишь интегрируемые, т.е. $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}$, где $\mu(A_i) < \infty$ при $c_i \neq 0$. При этом полагаем $0 \cdot \infty = 0$. Скажем, постоянная 1 уже не обязана быть интегрируемой, а 0 интегрируем. Рутинная проверка показывает, что сохраняется большинство свойств интеграла Лебега: интеграл линеен и монотонен, верны неравенства Чебышёва, Гёльдера и Минковского (но не Йенсена), теоремы Лебега, Беппо Леви и Фату, точно так же вводятся пространства L^p и доказывается их полнота. Теорема Егорова в прежней формулировке, конечно, теряет силу, скажем, функции $n^{-1}x$ на прямой не могут равномерно сходиться к нулю на множестве с дополнением малой меры.

Есть две причины, по которым нецелесообразно сразу вводить бесконечные меры: 1) дополнительные хлопоты с бесконечностями затемняют существо дела и мешают пониманию центральных идей, определения становятся более техническими (достаточно посмотреть на определение измеримого множества, которое здесь по гуманным соображениям не приводится), а в теоремах появляется необходимость делать оговорки о характере мер (причем нередко в разных теоремах разные оговорки); 2) все содержательные факты для бесконечных мер банально сводятся к конечным мерам.

Последнее основано на таком приеме: пусть функция f интегрируема по бесконечной мере μ. Тогда множества $X_n = \{2^{-n-1} \leqslant |f| < 2^{-n}\}$ и $X_0 = \{|f| \geqslant 1/2\}$ имеют конечные меры. Введем конечную меру ν так: сужение ν на X_n есть $2^{-n}(\mu(X_n)+1)^{-1}\mu$, а на X_0 она равна μ. Тогда интеграл от f по мере ν есть интеграл по мере ν от функции g, равной $2^n(\mu(X_n)+1)f$ на X_n. Мера оставшейся части пространства $X \setminus \cup_{n=0}^{\infty} X_n)$ может быть даже бесконечной, но функция f на ней равна нулю, что не влияет на интеграл. Аналогично для счетной последовательности интегрируемых функций f_n можно представить X как счетное объединение дизъюнктных измеримых множеств X_j, вне объединения которых все функции f_n равны нулю. Опять строим конечную меру ν указанным способом. Интеграл от f_n по μ равен интегралу от g_n по ν, где g_n получается из f_n описанным переопределением. Эта процедура позволяет перенести большинство базовых фактов с конечных мер на бесконечные без передоказывания (скажем, при нашем способе доказательства теоремы Лебега было важно, что она конечна, но теперь нового способа не требуется).

Есть три важных класса мер, в основном ради которых и затевается разговор про бесконечные меры: меры Лебега, мера Хаусдорфа и меры Хаара. О последних двух кратко будет сказано позже.

Глава 3

Операции над мерами и связь с производной

§ 3.1. Произведение мер

Если даны два пространства с мерами $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, то в произведении $X \times Y$ возникает класс множеств вида $A \times B$, где $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, называемых измеримыми прямоугольниками, которым естественно приписать меру $\mu(A)\nu(B)$, что дает основания рассчитывать, что на $X \times Y$ имеется мера $\mu \otimes \nu$ с

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Однако по нашей доктрине мера $\mu \otimes \nu$ должна быть определена на σ-алгебре, а класс прямоугольников даже не алгебра. Проблема будет решена, если мы сможем разумно продолжить $\mu \otimes \nu$ на сигма-алгебру, порожденную прямоугольниками. Эта сигма-алгебра обозначается символом $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Например, в качестве упражнения полезно проверить, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Оказывается, так можно сделать.

Для всякого множества $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ положим

$$E_x = \{y\colon (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x\colon (x, y) \in E\}.$$

3.1.1. Определение. *Произведение мер $\mu \otimes \nu$ зададим формулой*

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_Y \mu(E^y)\, \nu(dy), \quad E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Разумеется, надо еще проверить, что формула имеет смысл: для всех сечений $E^y \in \mathcal{A}$, так что можно взять $\mu(E^y)$, а полученное будет $\mathcal{B}$-измеримой функцией, что даст возможность проинтегрировать ее по мере ν. Прежде чем это проверять, заметим, что для $E = A \times B$ мы имеем $E^y = A$ при $y \in B$, $E^y = \varnothing$ при $y \notin B$, так что интеграл равен желаемому $\mu(A)\nu(B)$.

Кроме того, как функция от E интеграл счетно-аддитивен, ибо если $E = \cup_n E_n$, где E_n дизъюнктны, то $E^y = \cup_n E_n^y$ при каждом y, причем E_n^y тоже дизъюнктны. Значит,

$$\mu(E^y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^y).$$

По теореме Беппо Леви (или по теореме Лебега, здесь обе годятся) интеграл от левой части равен сумме ряд из интегралов от $\mu(E_n^y)$, т.е. $\mu \otimes \nu(E) = \sum_n \mu \otimes \nu(E_n)$.

Теперь займемся проверкой существования интеграла.

3.1.2. Лемма. *Для всякого $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ имеем $E^y \in \mathcal{A}$ при всех y.*

Доказательство. Для прямоугольников это уже проверили. Пусть $\mathcal{E}$ — класс всех таких $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, что утверждение верно. Этот класс есть сигма-алгебра, ибо операции над множествами дают такие же операции над сечениями (например: $(\cup_n E_n)^y = \cup_n E_n^y$). Значит, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ входит в $\mathcal{E}$, откуда $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{E}$. □

Со вторым свойством так дешево не разделаться. Для прямоугольников оно тоже тривиально, но вот что делать дальше? Применение меры к сечениям усложняет дело. Выручить может замечательная теорема Серпинского о монотонных классах.

Семейство $\mathcal{E}$ подмножеств множества X называется *монотонным классом*, если $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$ для каждой возрастающей последовательности множеств $E_n \in \mathcal{E}$ (т. е. $E_n \subset E_{n+1}$ при всех n) и $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$ для каждой убывающей последовательности множеств $E_n \in \mathcal{E}$ (т. е. $E_{n+1} \subset E_n$ при всех n).

Для всякого класса $\mathcal{E}$ подмножеств X существует минимальный монотонный класс, содержащий $\mathcal{E}$ и называемый *монотонным классом, порожденным* $\mathcal{E}$. Таким минимальным классом является пересечение всех монотонных классов, содержащих $\mathcal{E}$.

3.1.3. Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра множеств. Тогда σ-алгебра, порожденная $\mathcal{A}$, совпадает с монотонным классом, порожденным $\mathcal{A}$. Следовательно, если алгебра $\mathcal{A}$ входит в некоторый монотонный класс $\mathcal{M}$, то $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ — монотонный класс, порожденный $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$, ибо $\sigma(\mathcal{A})$ — монотонный класс. Докажем обратное включение. Для этого покажем, что $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ есть σ-алгебра. По определению монотонного класса достаточно установить, что $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ —

алгебра. Докажем сначала, что класс $\mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ замкнут относительно взятия дополнения. Пусть

$$\mathcal{M}_0 := \{B\colon\ B, X\backslash B \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})\}.$$

Класс $\mathcal{M}_0$ является монотонным, что очевидно из монотонности класса $\mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ и равенств

$$X\backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X\backslash B_n), \quad X\backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X\backslash B_n).$$

Поскольку $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, то получаем равенство $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$.

Проверим теперь замкнутость $\mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ относительно конечных пересечений. Пусть $A \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Введем класс множеств

$$\mathcal{M}_A := \bigl\{B \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})\colon\ A\cap B \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})\bigr\}.$$

Если $B_n \in \mathcal{M}_A$ — возрастающие множества, то получаем

$$A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n) \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}}).$$

Аналогично рассматривается случай, когда B_n убывают. Поэтому $\mathcal{M}_A$ — монотонный класс. Если $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, то имеем $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, откуда получаем $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Пусть теперь $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ и $B \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Тогда по доказанному $A\cap B \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, т. е. $A \in \mathcal{M}_B$. Таким образом, имеем включения $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Следовательно, $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ при всех $B \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, что означает замкнутость $\mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ относительно взятия пересечения двух множеств. Из доказанного следует, что $\mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ — алгебра, что и требовалось. □

3.1.4. Следствие. *Функция $y \mapsto \mu(E^y)$ является $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-измеримой для всякого $E \in \boldsymbol{\mathcal{A}}\otimes\boldsymbol{\mathcal{B}}$.*

Доказательство. Класс всех множеств $E \in \boldsymbol{\mathcal{A}}\otimes\boldsymbol{\mathcal{B}}$ с желаемым свойством является монотонным: если E_n возрастают к E, то сечения E_n^y возрастают к E^y, поэтому $\mu(E_n^y) \to \mu(E^y)$ при каждом y. Остается вспомнить, что предел измеримых функций измерим. Аналогично с убывающими E_n. □

То же рассуждение показывает, что существует и интеграл

$$\int_X \nu(E_x)\,\mu(dx)$$

и задает меру на $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Так как эта мера равна $\mu\otimes\nu$ на прямоугольниках, то обе меры равны на конечных дизъюнктных объединениях прямоугольников. Легко проверить (проверьте!), что класс таких объединений есть алгебра. Тогда меры равны и на порожденной сигма-алгебре, значит, имеем тождество

$$\mu\otimes\nu(E)=\int_Y \mu(E^y)\,\nu(dy)=\int_X \nu(E_x)\,\mu(dx).$$

Из этого тождества следует, что если $\mu\otimes\nu(E)=0$, то для ν-п.в. y имеем $\mu(E^y)=0$ и для μ-п.в. x имеем $\nu(E_x)=0$.

3.1.5. Следствие. (Теорема Фубини для $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-измеримых ограниченных функций) *Пусть $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-измеримая функция f ограничена. Тогда*

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu)=\int_Y\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\,\nu(dy)$$
$$=\int_X\int_Y f(x,y)\,\nu(dy)\,\mu(dx),$$

где оба повторных интеграла существуют.

Доказательство. Для индикаторов множеств это уже доказано, причем внутренние интегралы измеримы по оставшейся переменной. Значит, это же верно для простых функций. Если простые f_n равномерно сходятся к f, то внутренние интегралы тоже сходятся равномерно по оставшейся переменной. Поэтому получаются ограниченные измеримые (по y и x соответственно) функции. В пределе остается верным и двойное равенство. $\square$

Это следствие еще не охватывает всех даже ограниченных $\mu\otimes\nu$-измеримых функций, даже не все индикаторы множеств из пополнения $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Например, для меры Лебега на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ всякое подмножество отрезка вещественной оси имеет меру нуль, но множество Витали не войдет в произведение сигма-алгебр измеримых по Лебегу множеств на отрезках, ибо для множеств из произведения сигма-алгебр выше было показано, что все их сечения входят в сигма-алгебру на сомножителе. Таким образом, даже произведение пополненных сигма-алгебр не обязано быть полным относительно произведения мер, т.е. $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu\otimes\nu}$ может быть шире $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Однако нетрудно распространить доказанное и на функции, измеримые относительно пополненной сигма-алгебры (напомним, что у нас измеримыми относительно меры считаются функции, измеримые относительно пополненной сигма-алгебры).

3.1.6. Теорема. (Теорема Фубини) *Пусть функция f интегрируема относительно меры $\mu\otimes\nu$. Тогда*

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mu(dx)\,\nu(dy) = \int_X \int_Y f(x,y)\,\nu(dy)\,\mu(dx),$$

где в правой части при почти каждом y первый внутренний интеграл по x существует и задает ν-интегрируемую функцию, и аналогично со вторым внутренним интегралом.

Доказательство. Достаточно рассмотреть $f\geqslant 0$. Сначала предположим, что эта функция $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-измерима. Для ограниченных f уже все сделано. Стандартные срезки $f_n=\min(f,n)$ возрастают к f. Поэтому их интегралы по $\mu\otimes\nu$ возрастают к интегралу от f. Рассмотрим первый повторный интеграл по μ и ν. При фиксированном y интегралы

$$F_n(y) = \int_X f_n(x,y)\,\mu(dx)$$

возрастают к пределу $F(y)$, равному интегралу от $f(x,y)$ по x, если он конечен, и к бесконечности в противном случае. Такой противный случай в самом деле может представиться для некоторых y, однако множество всех таких y имеет ν-меру нуль в силу теоремы Беппо Леви (со сделанным после нее замечанием), так как интегралы от F_n равномерно ограничены. Из этого же следует, что F интегрируема и ее интеграл по y есть предел интегралов от F_n. Если при каком-то y предел $F(y)$ конечен, то получаем интегрируемость $f(x,y)$ по x при этом y и равенство интеграла числу $F(y)$. Это дает первое равенство в теореме. Второе аналогично.

В общем случае интегрируема функция f всюду равна некоторой $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-измеримой функции, для которой все доказано. Поэтому достаточно рассмотреть случай $f=0$ почти всюду. По-прежнему считаем, что $f\geqslant 0$. Пусть $f\leqslant N$. Так как f отлична от нуля на множестве Z меры нуль, то найдется $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ с $Z\subset E$. Тогда $Z^y\subset E^y$ при каждом y, значит, достаточно получить равенство $\mu(E^y)=0$ для ν-п.в. y. Так оно и есть: ведь интеграл от $\mu(E^y)$ по y есть $\mu\otimes\nu(E)=0$. Таким образом, при каждом N функция $\min(f(x,y),N)$ при почти каждом y имеет нулевой интеграл по x. Поэтому при почти всех y так будет сразу для всех N, что при $N\to\infty$ дает тоже самое и для $f(x,y)$. $\square$

Важно, что без предположения априорной интегрируемости на произведении $X \times Y$ из существования повторных интегралов не следует их равенство, причем даже если они вдруг равны, то f не обязана быть интегрируемой. Наконец, может быть и так, что один повторный интеграл существует, а другой нет. Все эти примеры надо обязательно построить.

Однако есть один специальный случай, когда хватает повторных интегралов.

Задача. Доказать, такую теорему Тонелли:

если неотрицательная функция f измерима относительно $\mu \otimes \nu$, то из существования одного повторного интеграла следует ее $\mu \otimes \nu$-интегрируемость.

Однако без предположения измеримости даже великие итальянцы бессильны (в качестве задачи построить пример, но эта задача сложнее предыдущей).

3.1.7. Пример. Если функции f и g интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, то из теорем Тонелли и Фубини следует интегрируемость функции $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и равенство

$$\iint f(x)g(y)\,dx\,dy = \int f(x)\,dx \int g(y)\,dy.$$

По индукции определено конечное произведение мер $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$. Можно ввести произведение любого набора вероятностных мер. Можно также распространить конструкцию на произведение нескольких σ-конечных мер, т.е. бесконечных мер, сосредоточенных на счетных объединениях множеств конечной меры (как мера Лебега на $\mathbb{R}^n$). В частности, определено произведение $\mu \otimes \lambda$, где λ — мера Лебега на прямой. С помощью этого произведения докажем такой полезный факт.

3.1.8. Предложение. *Пусть $f \geqslant 0$ — μ-интегрируемая функция. Тогда*

$$\int_X f\,d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(x\colon f(x) \geqslant t)\,dt = \mu \otimes \lambda(\{(x, t)\colon 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}).$$

Доказательство. Подграфик

$$P = \{(x, t)\colon 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$$

является $\mu \otimes \lambda$-измеримым множеством, что следует из измеримости функции $(x, t) \mapsto f(x) - t$ на $X \times \mathbb{R}$, вытекающей из измеримости $(x, t) \mapsto f(x)$ и $(x, t) \mapsto t$. Теперь $\mu \otimes \lambda(P)$ вычислим по теореме Фубини двумя способами. Сначала при фиксированном x замечаем, что P_x есть отрезок $[0, f(x)]$ длины $f(x)$, что дает интеграл от f после интегрирования по x. Затем при фиксированном t видим, что P^t есть множество таких x, что $f(x) \geqslant t$. □

Отметим, что при почти всех t верно равенство

$$\mu(x\colon f(x) \geqslant t) = \mu(x\colon f(x) > t).$$

Это равенство верно при всех t с $\mu(f^{-1}(t)) = 0$, но точек f с прообразом положительной меры может быть лишь счетное число, ибо эти прообразы дизъюнктны (точек с мерой прообраза более $1/k$ лишь конечное число при каждом k).

3.1.9. Пример. Обозначим через V_n объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Тогда объем шара радиуса R равен $V_n R^n$. Вычисляя V_n с помощью теоремы Фубини и замечая, что при фиксированном значении $x_n \in [-1, 1]$ множество $\{(x_1, \ldots, x_{n-1})\colon\ x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1 - x_n^2\}$ является $(n-1)$-мерным шаром радиуса $(1 - x_n^2)^{1/2}$, получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \int_{-1}^{1} (1 - x_n^2)^{(n-1)/2}\, dx_n = 2V_{n-1} \int_0^1 (1 - t^2)^{(n-1)/2}\, dt = \\ &= V_{n-1} \int_0^1 s^{-1/2} (1 - s)^{(n-1)/2}\, ds = V_{n-1} B(1/2, (n+1)/2) = \\ &= V_{n-1} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1 + n/2)}, \end{aligned}$$

откуда с учетом равенства $V_2 = \pi$ находим ответ

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)},$$

который можно преобразовать с помощью формулы понижения. Надо отдельно рассмотреть случаи четного и нечетного n, что дает на первый взгляд более «явное» выражение

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad V_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}, \quad (2m+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)$$

хотя во многих приложениях формула с гамма-функцией оказывается полезней.

§ 3.2. Теорема Радона – Никодима

Для всякой меры μ (возможно, бесконечной) на $\mathcal{A}$ и всякой μ-интегрируемой функции f возникает новая мера

$$\nu(A) := (f \cdot \mu)(A) := \int_A f\,d\mu.$$

Счетная аддитивность следует из теоремы Лебега: если множества $A_n \in \mathcal{A}$ дизъюнктны и A — их объединение, то $I_A f = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n} f$, причем $\sum_{n=1}^{N} I_{A_n}|f| \leqslant |f|$, поэтому данный ряд можно проинтегрировать почленно.

Функция f называется плотность (или плотностью Радона – Никодима) меры $\nu = f \cdot \mu$ относительно меры μ и обозначается символом $d\nu/d\mu$.

Как по мере ν узнать, задается ли она плотностью относительно меры μ? Мы рассмотрим случай неотрицательных мер.

3.2.1. Определение. *Мера $\nu \geqslant 0$ на $\mathcal{A}$ называется абсолютно непрерывной относительно меры $\mu \geqslant 0$ на $\mathcal{A}$, если $\nu(A) = 0$ для всякого множества A с $\mu(A) = 0$.*

Ясно, что мера с плотностью относительно μ абсолютно непрерывна относительно μ. Следующая теорема Радона – Никодима утверждает, что верно и обратное.

Ее доказательство основано на теореме Рисса, имеющей и самостоятельный интерес.

3.2.2. Теорема. *Всякая непрерывная линейная функция l на гильбертовом пространстве H имеет вид*

$$l(x) = (x, v)$$

для некоторого $v \in H$. В частности, всякая непрерывная линейная функция l на $L^2(\mu)$ имеет вид

$$l(\varphi) = \int \varphi(t)\psi(t)\,\mu(dt)$$

для некоторого $\psi \in L^2(\mu)$.

Доказательство. Функционал такого вида непрерывен, ибо по неравенству Коши – Буняковского $|l(x)| \leqslant \|v\|\,\|x\|$.

Пусть l линеен и непрерывен. Для $l = 0$ все ясно. Пусть $l \neq 0$. Тогда $H_0 = l^{-1}(0)$ есть замкнутое линейное подпространство в H коразмерности 1. Докажем, что есть единичный вектор $e \perp H_0$. Возьмем вектор v с $l(v) = 1$. Положим

$$\alpha = \inf\{\|v - u\|^2 \colon u \in H_0\}.$$

Тогда $\alpha > 0$, ибо $v \notin H_0$ и H_0 замкнуто. Найдутся $u_n \in H_0$ с оценкой $\|v - u_n\|^2 \leqslant \alpha + 1/n$. В H верно равенство параллелограмма

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2.$$

Поэтому

$$2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_k\|^2 = \|u_n - u_k\|^2 + \|2v - u_n - u_k\|^2.$$

Левая часть не больше $4\alpha + 2/n + 2/k$. Кроме того,

$$\|2v - u_n - u_k\|^2 = 4\|v - (u_n + u_k)/2\|^2 \geqslant 4\alpha,$$

ибо $(u_n + u_k)/2 \in H_0$. Итак, $\|u_n - u_k\|^2 \leqslant 2/n + 2/k$, т.е. последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна. В силу полноты H и замкнутости H_0 она сходится к некоторому $v_0 \in H_0$. Тогда $\|v - v_0\|^2 = \alpha$. Из этого следует, что $v - v_0 \perp u$ для всех $u \in H_0$. В самом деле, функция

$$t \mapsto (v - v_0 - tu, v - v_0 - tu)$$

имеет минимум в нуле, поэтому ее производная в нуле равна нулю, т.е. $(v - v_0, u) = 0$. Вектор $e = (v - v_0)/\|v - v_0\|$ — искомый. С помощью него зададим непрерывный линейный функционал по формуле

$$l_0(x) = l(e)(x, e).$$

Тогда $l_0(e) = l(e)$ и $l_0 = l = 0$ на H_0. Значит, $l_0(x) = l(x)$ для всех x. Итак, $v = l(e)e$. □

3.2.3. Теорема. (Теорема Радона – Никодима) *Если мера ν абсолютно непрерывна относительно μ, то она задается плотностью относительно μ.*

Доказательство. Возьмем новую меру $\lambda = \mu + \nu$. На $L^2(\lambda)$ рассмотрим линейную функцию

$$l(\varphi) = \int \varphi \, d\nu.$$

Она корректно определена: так как $\nu \leqslant \lambda$, то всякая λ-интегрируемая функция оказывается λ-интегрируемой, причем эквивалентные функции дают одинаковые интегралы. По неравенству Коши–Буняковского

$$|l(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_{L^2(\nu)} \leqslant \|\varphi\|_{L^2(\lambda)},$$

что влечет непрерывность l. По теореме Рисса найдется такая функция $\psi \in L^2(\lambda)$, что

$$\int \varphi\, d\nu = \int \varphi\psi\, d\lambda.$$

Значит,

$$\int \varphi\, d\nu = \int \varphi\psi\, d\nu + \int \varphi\psi\, d\mu,$$

откуда

$$\int \varphi(1-\psi)\, d\nu = \int \varphi\psi\, d\mu.$$

Это верно для всех $\varphi \in L^2(\lambda)$. Если взять φ равным индикатору множества $A = \{\psi < 0\}$, то левая часть неотрицательна, а правая неположительна. Значит, обе равны нулю, откуда $\mu(A) = 0$, а тогда $\nu(A) = 0$. Аналогично, взяв $B = \{\psi \geqslant 1\}$, получаем $\mu(B) = 0$ и потому $\nu(B) = 0$. Итак, $0 \leqslant \psi < 1$ почти всюду относительно μ и ν. Теперь заметим, что

$$f = \frac{\psi}{1-\psi}$$

интегрируема относительно μ. Действительно, функции

$$\varphi_n = (1-\psi)^{-1} I_{\{\psi \leqslant 1-1/n\}}$$

ограничены и стремятся к $(1-\psi)^{-1}$. Для них имеем $\varphi_n(1-\psi) = I_{\{\psi \leqslant 1-1/n\}}$, $\varphi_n\psi = f I_{\{\psi \leqslant 1-1/n\}}$, откуда

$$\nu(\{\psi \leqslant 1-1/n\}) = \int f I_{\{\psi \leqslant 1-1/n\}}\, d\mu,$$

т.е. правые части равномерно ограничены, что по теореме Беппо Леви дает μ-интегрируемость f, ибо множества $\{\psi \leqslant 1-1/n\}$ возрастают ко всему пространству. Теперь то же самое можно проделать с $\varphi_n = I_A\varphi_n = (1-\psi)^{-1} I_{\{\psi \leqslant 1-1/n\}}$ для $A \in \mathcal{A}$. Это даст

$$\nu(A \cap \{\psi \leqslant 1-1/n\}) = \int_A f I_{\{\psi \leqslant 1-1/n\}}\, d\mu,$$

что при $n \to \infty$ дает нужное равенство

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu,$$

означающее, что $f = d\nu/d\mu$. □

Из доказательства можно извлечь более сильное утверждение: если даны две меры $\mu \geqslant 0$ и $\nu \geqslant 0$, то ν можно разложить в сумму

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

где мера ν_1 абсолютно непрерывна относительно μ, а мера ν_2 взаимно сингулярна с мерой μ, т.е. полностью сосредоточена на некотором множестве $A_0 \in \mathcal{A}$ с $\mu(A_0) = 0$. Конечно, это следует и из самой теоремы: записав $\mu = f \cdot \lambda$, $\nu = g \cdot \lambda$, где $\lambda = \mu + \nu$, в качестве A_0 возьмем множество $\{f = 0\} \cap \{g > 0\}$.

Теорема Радона – Никодима не говорит, как найти f. Это может быть сделать трудно, но имеется один важный случай, когда по крайней мере принципиально это возможно.

3.2.4. Теорема. *Пусть μ и ν — борелевские меры на кубе в $\mathbb{R}^n$, причем ν абсолютно непрерывна относительно μ. Тогда для μ-п.в. x верно равенство*

$$\frac{d\mu}{d\nu}(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r)}{\nu(B(x,r)},$$

где $B(x, 1/k)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в x.

В частности, если функция f интегрируема по Лебегу, то для почти всех x имеем

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r)} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy.$$

Для функции на прямой имеем почти всюду

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(y)\, dy.$$

В последнем случае также почти всюду

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{r} \int_{x}^{x+r} f(y)\, dy.$$

Все эти утверждения выглядят почти элементарно, но доказательства их трудны.

§ 3.3. Преобразования мер

Пусть даны пространства $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ с сигма-алгебрами, причем на $\mathcal{A}$ задана мера μ. Тогда всякое отображение $F\colon X \to Y$ с тем свойством, что

$$F^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall\, B \in \mathcal{B}$$

(такие отображения называют $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-измеримыми) задает так называемую индуцированную меру (или меру-образ) на Y по формуле

$$(\mu \circ F^{-1})(B) := \mu(F^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Символ $\mu\circ F^{-1}$ является слитным и имеет ясное мнемоническое значение. Из счетной аддитивности μ сразу следует счетной аддитивность образа. Интегралы по индуцированной мере считаются так.

3.3.1. Теорема. (Общая формула замены переменных) *Функция g на Y интегрируема относительно $\mu \circ F^{-1}$ в точности тогда, когда функция $g \circ F$ интегрируема относительно μ. При этом*

$$\int_Y g(y)\, \mu \circ F^{-1}(dy) = \int_Y g(F(x))\, \mu(dx).$$

Доказательство. Если $g = I_B$, то это просто определение образа меры. Значит, формула верна для простых функций, а тогда равномерным пределеьным переходом она переносится на ограниченные $\mathcal{B}$-измеримые функции. С помощью монотонного предела и срезок $\min(g, n)$ распространяем ее на неотрицательные $\mathcal{B}$-измеримые функции, которые интегрируемы по $\mu \circ F^{-1}$ (или для которых $g \circ F$ интегрируема относительно μ). Из этого следует общий случай. $\square$

Те, кто помнят про якобианы, могут спросить: куда делся якобиан в этой общей формуле? Ответ: он спрятан в меру $\mu \circ F^{-1}$. Чтобы его извлечь, рассмотрим такой случай: мера $\mu = \lambda_n$ есть мера Лебега на ограниченной области U в $\mathbb{R}^n$, $F\colon U \to V$ — диффеоморфизм между U и областью V (обратимое отображение, непрерывно дифференцируемое вместе с обратным). Нетрудно проверить (проверьте!), что при диффеоморфизме образы и прообразы множеств меры нуль имею меру нуль. Поэтому индуцированная мера $\lambda_n \circ F^{-1}$ имеет плотность ϱ_F относительно меры Лебега на V. Вычислим ее. Через $DF(x)$ обозначим производную F в точке x. При наших условиях это обратимый линейный оператор.

3.3.2. Теорема. (Формула замены переменных в $\mathbb{R}^n$) *При указанных условиях имеем*

$$\varrho_F(y) = \frac{1}{|\det DF(F^{-1}(y))|}.$$

Поэтому для всякой ограниченной измеримой функции φ на V имеем

$$\int_U \varphi(F(x))\, dx = \int_V \varphi(y) \frac{1}{|\det DF(F^{-1}(y))|}\, dy. \tag{3.3.1}$$

Для интегрируемой функции ψ на U имеем

$$\int_U \psi(x)\,dx = \int_V \psi(F^{-1}(y))\frac{1}{|\det DF(F^{-1}(y))|}\,dy. \tag{3.3.2}$$

Доказательство. Те, кто еще помнит формулу замены переменных для интеграла Римана, могут вывести из нее это утверждение. Однако можно применить и теорему о вычислении плотности как предела отношения мер шаров. Для этого надо взять обратный диффеоморфизм $G = F^{-1}$ и проверить следующее: предел отношения меры $G(B(y,1/k))$ и объема шара $B(y,1/k)$ есть $|\det DG(y)|$. Это верно для линейного отображения G по свойствам меры Лебега. В общем случае $G(y+v) = DG(y)v + r(v)$, где $r(v)$ есть o-малое от $\|DG(y)v\|$, что приводит к такому же пределу путем сравнения мер шаров с близкими радиусами. $\square$

Предыдущая теорема имеет полезное обобщение (правда, доказательство весьма нетривиально). Известно, что липшицево отображение в $\mathbb{R}^n$ почти всюду имеет производную. Эта почти всюду существующая производная и фигурирует в следующей теореме.

3.3.3. Теорема. (Формула замены переменных для липшицевых отображений) *Пусть F — липшицево отображение в $\mathbb{R}^n$, переводящее взаимно-однозначно борелевское множество B в борелевское множество $F(B)$. Тогда почти всюду на B производная $DF(x)$ обратима и для всякой интегрируемой функции ψ на B имеем*

$$\int_B \psi(x)\,dx = \int_{F(B)} \psi(F^{-1}(y))\frac{1}{|\det DF(F^{-1}(y))|}\,dy. \tag{3.3.3}$$

§ 3.4. Свертка и преобразование Фурье

Как уже было отмечено выше, если функции f и g интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, то $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ функция интегрируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и верно равенство

$$\iint f(x)g(y)\,dx\,dy = \int f(x)\,dx \int g(y)\,dy.$$

Сделав в левом интеграле замену переменных $u = x+y$, $v = y$, получаем интегрируемость функции $(u,v) \mapsto f(u-v)g(v)$. Теперь теорема Фубини говорит, что при почти всяком u функция $f(u-v)g(v)$ интегрируема по v. Это отнюдь не очевидно для неограниченной функции. Скажем, если $f(u) = g(u) = |u|^{-1/2}$ на $[-1,1]$ и нуль вне, то при $u = 0$ получаем неинтегрируемую $1/v$.

Из сказанного следует, что при почти всех x определена функция

$$f*g(x)=\int f(x-y)g(y)\,dy.$$

Эта функция называется сверткой. Как показано выше, она интегрируема, причем

$$\|f*g\|_{L^1}\leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

С помощью теоремы Фубини легко проверить (проверьте!), что

$$f*g=g*f.$$

По аналогии со сверткой функций вводится светрка ограниченных мер μ и ν: мера $\mu*\nu$ определяется как образ меры $\mu\otimes\nu$ на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ при отображении $(x,y)\mapsto x+y$. Из общей формулы замены переменных и теоремы Фубини следует, что для каждого борелевского множества B в $\mathbb{R}^n$ верны равенства

$$\mu*\nu(B)=\int_{\mathbb{R}^n}\mu(B-y)\,\nu(dy)=\int_{\mathbb{R}^n}\nu(B-x)\,\mu(dx).$$

В самом деле, левая часть равна интегралу от I_B по $\mu*\nu$ и потому есть

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} I_B(x+y)\mu\otimes\nu(dx\,dy).$$

Вычисляя это как повторный интеграл, замечаем, что при фиксированном y интеграл по μ от $I_B(x+y)=I_{B-y}(x)$ есть $\mu(B-x)$. Эти равенства можно использовать в качестве определения.

Еще одна важная операция над функциями и мерами на $\mathbb{R}^n$ — преобразование Фурье. Для $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, где пространство комплексное, полагаем

$$\widehat{f}(y)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-i\langle y,x\rangle)f(x)\,dx.$$

Из теоремы Лебега следует, что функция $\widehat{f}$ непрерывна. Ясно, что она ограничена:

$$|\widehat{f}|\leqslant(2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1}.$$

Кроме того, несложно показать, приближая f ступенчатыми функциями, что $\lim\limits_{|y|\to\infty}\widehat{f}(y)=0$. Однако интегрируемости $\widehat{f}$ может не быть: вычислите Фурье от индикатора отрезка.

По теореме Фубини проверяется равенство

$$\widehat{f*g}(y)=(2\pi)^{n/2}\widehat{f}(y)\widehat{g}(y).$$

В самом деле, левая часть есть

$$(2\pi)^{-n/2} \int\int \exp(-i\langle y, x\rangle) f(x-u) g(u)\, du\, dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\int \exp(-i\langle y, u+v\rangle) f(v) g(u)\, dv\, du,$$

где $\exp(-i\langle y, u+v\rangle) = \exp(-i\langle y, u\rangle)\exp(-i\langle y, v\rangle)$, так что интеграл распадается в произведение.

Обратное преобразование Фурье задается формулой

$$\widetilde{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle y, x\rangle) f(x)\, dx.$$

Иначе говоря, $\widetilde{f}(y) = \widehat{f}(-y)$. Почему же оно обратное? Оказывается, что если $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то почти всюду верна формула обращения

$$f = \widetilde{\widehat{f}}.$$

Однако это отнюдь не очевидно и не проверяется банально по теореме Фубини.

Можно также доказать (с помощью теоремы Фубини и формулы обращения), что если функции f и g интегрируемы и ограничены, причем их преобразования Фурье тоже интегрируемы, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}}(y)\, dy.$$

Иначе говоря, $(f, g)_{L^2} = (\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2}$. С помощью этого равенства преобразование Фурье продолжается до унитарного оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Аналогично преобразованию Фурье функций вводится преобразование Фурье ограниченных мер (однако по традиции без множителя и без минуса в экспоненте):

$$\widetilde{\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle y, x\rangle)\, \mu(dx).$$

В качестве упражения докажите равенство

$$\widetilde{\mu * \nu} = \widetilde{\mu}\widetilde{\nu}.$$

§ 3.5. Связь интеграла с производной

В теории интеграла Римана для непрерывных функций одним из ваднейших фактов является формула Ньютона–Лейбница

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

для функции с непрерывной производной. При этом для непрерывной функции верно равенство

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt.$$

Будет ли первое равенство верно для интеграла Лебега без предположения о непрерывности производной? Как обобщить второе равенство? Конечно, при обобщении сразу ясно, что оно не может сохраниться во всех точках. Даже для функции $f = I_{[0,1]}$ в нуле равенство нарушается. При этом функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в нуле, но первая формула для нее верна.

Сначала приведем ответ на первый вопрос.

3.5.1. Теорема. *Пусть функция f на $[a,b]$ непрерывна и на интервале (a,b) имеет интегрируемую по Лебегу производную. Тогда верна формула Ньютона–Лейбница*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Однако даже если f имеет производную во всех точках прямой, эта производная не обязана быть интегрируемой на каждом отрезке. Вот пример: $f(x) = x^2\sin(x^{-3})$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Вычислите производную и проверьте, что она не интегрируема по Лебегу на $[0,1]$.

Поэтому в предыдущей теореме нельзя убрать условие интегрируемости f'. Кроме того, недостаточно вместо дифференцируемости всюду иметь дифференцируемость лишь почти всюду. В качестве примера рассмотрите лестницу Кантора H: это непрерывная возрастающая функция на $[0,1]$, сначала задаваемая на интервалах дополнения ($1/2$ на средней трети, $1/4$ и $3/4$ на средних третях оставшегося и т.д.). Для нее вообще $H'(x) = 0$ во всех точках дополнения, т.е. почти всюду, но функция ведь непостоянная.

Чтобы разобраться с этими вопросами, полезно ввести два определения.

3.5.2. Определение. *Функция f на $[a,b]$ имеет ограниченную вариацию, если*

$$V_a^b f := \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_{i+1} - f(t_i)| < \infty,$$

где $\sup$ *взят по всем конечным разбиениям $a = t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n = b$.*

Основной пример: возрастающая функция f, для нее

$$V_a^b f = f(b) - f(a).$$

Нетрудно проверить также, что разность возрастающих функций имеет ограниченную вариацию. Оказывается, не бывает других функций ограниченной вариации. В качестве задачи докажите, что если f имеет ограниченную вариацию, то функции $V(t) = V_a^t f$ и $W(t) = V(t) - f(t)$ — возрастающие. Поэтому $f = V - W$.

Важное значение имеет следующая теорема Лебега.

3.5.3. Теорема. *Пусть f — возрастающая функция на $[a,b]$. Тогда почти всюду существуют производная $f'(x)$, причем она интегрируема и верно неравенство*

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a).$$

Значит, почти всюду дифференцируема всякая функция ограниченной вариации, причем ее производная интегрируема.

Как показывает пример лестницы Кантора, равенства может не быть.

Введем еще более узкий класс функций.

3.5.4. Определение. *Функция F на $[a,b]$ абсолютно непрерывна, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого конечного набора попарно непересекающихся интервалов $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$ в $[a,b]$ с $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ верно неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Это свойство влечет непрерывность, но сильнее ее (хотя напоминает равномерную непрерывность для тех, кто знал, что это такое). Скажем, если взять кусочно-линейную функцию F так, что $F(n-1) = (-1)^n n^{-1}$, то из-за расходимости гармонического ряда для всякого δ

можно набрать конечный набор дизъюнктных интервалов суммарной длины менее δ и суммой модулей приращений более 1.

Важный конструктивный пример абсолютно непрерывной функции — липшицева функция, т.е. функция f, для которой

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$$

с некоторым числом L. Для такой функции в качестве δ из определения годится $\varepsilon/(L+1)$.

Заметим, что абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию. В самом деле, взяв δ для $\varepsilon = 1$, разделим $[a, b]$ на N промежутков длины не более δ. Тогда $V_a^b F \leqslant N$. Из предыдущей теоремы следует, что $F'(x)$ существует почти всюду и интегрируема. Это заключение совершенно нетривиально даже для липшицевых функций.

Важнейшее значение в теории интеграла имеет следующая теорема Лебега.

3.5.5. Теорема. *Функция F на $[a, b]$ абсолютно непрерывна в точности тогда, когда найдется такая интегрируемая функция f, что*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(y)\,dy.$$

При этом $F'(x) = f(x)$ почти всюду.

Поясним доказательство. Если F имеет такой вид, то она абсолютно непрерывна в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (было в коллоквиуме). Обратно, если F абсолютно непрерывна, то дело сводится к возрастающей функции F, так как можно проверить, что указанные выше возрастающие функции V и W из разложения $F = V - W$ тоже абсолютно непрерывны. Кроме того, можно считать, что $F(a) = 0$. Можно построить борелевскую меру μ на $[a, b]$, для которой $F(t) = \mu([0, t])$. Она строится по аналогии с мерой Лебега (сначала на алгебре конечных объединений промежутков, затем проверяется счетная аддитивность). Из абсолютной непрерывности F вытекает, что мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. По теореме Радона – Никодима она задается интегрируемой плотностью f. Это и есть то, что надо. Наименее очевидно, что $F'(x) = f(x)$ почти всюду (даже сли знать, что F' существует почти всюду), но это уже было объявлено выше даже в многомерном случае.

В качестве упражнения докажите, что если функции f и g абсолютно непрерывны, то такова и fg. Поэтому приходим к формуле интегрирования по частям:

$$\int_a^b fg'\,dx = fg|_a^b - \int_a^b f'g\,dx.$$

Она следует из формулы Ньютона–Лейбница для fg.

§ 3.6. Меры Хаусдорфа и поверхностные меры

Конструкция Хаусдорфа такова. Зафиксируем число $\alpha \in (0, n]$, которое будет ответственно за «размерность» меры (хотя может быть и нецелым). Для всякого множества B в $\mathbb{R}^n$ его внешняя α-мера Хаусдорфа $H^\alpha(B)$ задается так. Сначала при фиксированном $\delta > 0$ положим

$$H^\alpha_\delta(B) = C(\alpha) \inf\Bigl\{\sum_{k=1}^\infty |\mathrm{diam}\, Q_k|^\alpha,\ B \subset \bigcup_{k=1}^\infty Q_k,\ \mathrm{diam}\, Q_k \leqslant \delta\Bigr\},$$

$$C(\alpha) = \frac{\pi^{\alpha/2} 2^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha/2+1)},$$

где inf берется по всем счетным покрытиям B замкнутыми множествами Q_k диаметра не более δ. Ясно, что $H^\alpha_{\delta_1}(B) \leqslant H^\alpha_{\delta_2}(B)$ при $\delta_1 \geqslant \delta_2$, ибо с уменьшением δ покрытий становится меньше (а инфимум больше). Поэтому существует (возможно, бесконечный) предел

$$H^\alpha(B) := \lim_{\delta\to 0} H^\alpha_\delta(B) = \sup_{\delta>0} H^\alpha_\delta(B).$$

Как и в случае обычной меры Лебега, полученная функция множества (определенная на всех множествах) не обязана быть аддитивной (точнее говоря, при допуске аксиомы выбора она точно не будет аддитивной, хотя при запрете аксиомы выбора вопрос остается темным, т. е. зависящим от привлечения дополнительных аксиом). Однако, как и для меры Лебега, имеется способ сузить область определения внешней меры H^α так, что на ней она окажется даже счетно-аддитивной. А именно: в качестве области определения можно взять класс $\mathcal{H}_\alpha$ всех множеств $B \subset \mathbb{R}^n$, для которых равенство

$$H^\alpha(E) = H^\alpha(E \cap B) + H^\alpha(E \backslash B)$$

верно для всякого множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Иначе говоря, всякое множество должно разбиваться множеством B на две части с условием аддитивности внешней меры. Тогда на $\mathcal{H}_\alpha$ внешняя мера H^α оказывается счетно-аддитивной (со значениями в $[0, +\infty]$), а сам класс $\mathcal{H}_\alpha$ оказывается σ-алгеброй. Кроме того, все «разумные» множества попадают в класс $\mathcal{H}_\alpha$ (хотя и могут получить бесконечные меры). В частности, в этот класс попадают все открытые и замкнутые множества, а тогда и все, что можно получить из них счетными операциями объединения, пересечения и дополнения. Наконец, для целых значений α получаются те поверхностные меры, которые и ожидаются (именно для этого выбирается множитель $C(\alpha)$). Скажем, при $\alpha = n$ получается мера Лебега (см. Бураго, Бураго, Иванов [**2**], Эванс, Гариепи [**3**]). Теперь, построив меру, можно интегрировать по ней функции методом Лебега. Описанная конструкция замечательна своей простотой и тем, что не требует от измеряемых множеств просто ничего. Однако у этих достоинств есть и своя цена: обычно довольно трудно вычислять меры явно заданных множеств по указанным формулам (скажем, вряд ли студенты будут рады вычислять по ним площадь сферы). Поэтому далее приводится гораздо менее общая конструкция, существовавшая задолго до появления мер Лебега и Хаусдорфа.

Поверхностные меры Хаусдорфа могут быть использованы для представления объемного интеграла посредством нелинейного аналога теоремы Фубини, в котором интегрирование ведется по множествам уровня $\{f = y\}$ заданной достаточно регулярной функции f, а затем по y. Точное утверждение состоит в следующем (см. обоснование в Эванс, Гариепи [**3**]).

3.6.1. Теорема. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — липшицево отображение, $n \geqslant m$. Тогда для всякой интегрируемой функции φ на $\mathbb{R}^n$ ее сужение на $f^{-1}(y)$ оказывается интегрируемым по мере Хаусдорфа H^{n-m} для почти всякого $y \in \mathbb{R}^m$ и верно равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) Jf(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}(y)} \varphi\, dH^{n-m}\, dy,$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега и

$$Jf = \sqrt{G_f} = \sqrt{\det((Df)^* Df)}.$$

В частности, для всякой липшицевой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ верна формула Кронрода – Федерера

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H^{n-1}(\{f = t\})\, dt.$$

Если же $|\nabla f(x)| \geqslant c > 0$, то для всякой интегрируемой функции φ на $\mathbb{R}^n$ верно равенство

$$\int_{\{f>t\}} \varphi(x)\,dx = \int_t^{+\infty} \int_{\{f=s\}} \frac{\varphi}{|\nabla f|}\,dH^{n-1}\,ds.$$

Эту теорему можно усилить, рассматривая еще более общие области и границы (так называемые множества с ограниченным периметром), а также более общие функции (функции из классов Соболева), см. Эванс, Гариепи [**3**].

Приведем еще одно важное соотношение, связывающее поверхностный интеграл и объемный — формулу Гаусса – Остроградского. Будем говорить, что открытое множество U имеет локально липшицеву границу ∂U, если для каждой точки $a \in \partial U$ можно сдвигом и ортогональным преобразованием перейти к координатам, в которых при некотором $r > 0$ пересечение куба $Q(a,r) = \{x\colon\ |x_i - a_i| < r\}$ с множеством U имеет вид $\{x \in Q(a,r)\colon\ x_n < g(x_1,\ldots,x_{n-1})\}$ с некоторой функцией g, удовлетворяющей условию Липшица. В этом случае пересечение ∂U с указанным кубом есть график функции g. В случае ограниченной области с локально липшицевой границей эта граница покрывается конечным числом кубом с указанным свойством.

3.6.2. Теорема. *Пусть U — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с локально липшицевой границей ∂U. Тогда почти всюду относительно меры λ_{n-1} на ∂U задана внешняя нормаль $\mathrm{n}_{\partial U}$ и для всякого векторного поля $v \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ верно равенство*

$$\int_U \operatorname{div} v\,dx = \int_{\partial U} \langle v, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle\,d\lambda_{n-1}.$$

Более того,это же равенство верно для всякого липшицева векторного поля v.

Теперь введем некоторые элементарные множества, по которым можно более явно задавать интегралы.

3.6.3. Определение. *Пусть $k \in \{1,\ldots,n\}$. Будем называть элементарной k-ячейкой в $\mathbb{R}^n$ образ открытого куба $U = \{0,1\}^k$ при непрерывно дифференцируемом отображении $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, обладающем таким свойством: в окрестности $W \supset \varphi(U)$ имеется непрерывно дифференцируемое отображение $\psi\colon W \to \mathbb{R}^k$, обратное к φ на $\varphi(U)$. Такое отображение φ будем называть диффеоморфным вложением.*

Множество M в $\mathbb{R}^n$ называется k-мерным многообразием в $\mathbb{R}^n$, если всякая его точка обладает окрестностью в относительной топологии, являющейся элементарной k-ячейкой.

Множество $\varphi(U)$ называют *картой*, открытый куб U называют *координатной окрестностью*, а отображение φ — *параметризацией*. Если две карты $\varphi(U)$ и $\psi(U)$ пересекаются, то возникает *функция перехода* $\eta_{\varphi,\psi} = \psi^{-1} \circ \varphi\colon, \varphi^{-1}(V) \to \psi^{-1}(V)$, $V = \varphi(U) \cap \psi(U)$.

Класс гладкости многообразия определяется классом гладкости локальных параметризаций. В приведенном выше определении речь идет о C^1-многообразиях, но во многих случаях принято рассматривать гладкие многообразия, т. е. многообразия класса C^∞.

Локально k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ задается как множество решений системы

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_{n-k}(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где функции f_j на $\mathbb{R}^n$ имеют определенный класс гладкости (бесконечно дифференцируемы в случае гладкого многообразия), причем их градиенты линейно независимы в каждой точке. Например, гиперповерхность (многообразие размерности $n-1$) локально выглядит как множество нулей гладкой функции с ненулевым градиентом. Связь такого описания с определенным выше параметрическим вытекает из теоремы о неявной функции. Подчеркнем, что это представление имеет место лишь локально. Некоторые хорошие поверхности (скажем, сфера) допускают простое глобальное задание.

Интеграл непрерывной функции f с компактным носителем в элементарной k-ячейке $K = \varphi(U)$ по k-мерной мере λ_k можно задать (что обычно и делается в учебниках) формулой

$$\int_K f\, d\lambda_k := \int_U f(\varphi(u)) \sqrt{G_\varphi(u)}\, du,$$

где

$$G_\varphi := \det\Bigl(\Bigl\langle \frac{\partial\varphi}{\partial_{u_i}}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} \Bigr\rangle\Bigr)_{i,j\leqslant k}.$$

Точно так же определяется интеграл от функции f, для которой функция $f \circ \varphi \sqrt{G_\varphi}$ интегрируема по Риману или по Лебегу.

Это определение оказывается разумным по следующим причинам:

1) оно инвариантно относительно выбора параметризации (это проверяется несложно),

2) оно дает ожидаемое значение интеграла в тех случаях, когда есть априорно естественные иные способы задать такой интеграл (примеры приведены ниже),

3) применительно к индикаторам множеств это определение приводит с точностью до постоянного множителя к k-мерной мере Хаусдорфа (доказательство этого весьма непросто и здесь не будет приводиться).

Сначала рассмотрим случай линейного отображения. Если куб U из $\mathbb{R}^k$ отображается в $\mathbb{R}^n$ линейным оператором A, то его образ оказывается k-мерным параллелепипедом в k-мерном подпространстве в $\mathbb{R}^n$, поэтому для него понятие объема уже есть, и было бы естественно ожидать такое же значения для введенной меры. Это ожидание оправдывается. Напомним, что объем параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_n$, равен квадратному корню из матрицы Грама этих векторов, т. е. матрицы с элементами $\langle v_i, v_j \rangle$. В самом деле, объем указанного параллелепипеда равен модулю определителя оператора A, для которого $Ae_i = v_i$, что совпадает с $\sqrt{\det(A^*A)}$. При этом A^*A и есть матрица Грама для Ae_i.

3.6.4. Пример. Объем $A(U)$ в k-мерном подпространстве $\operatorname{Ran} A$, где $\operatorname{Ran} A = A(\mathbb{R}^k)$, равен $\lambda_k(A(U))$, причем верно равенство

$$\lambda_k(A(U)) = |\det A^*A|^{1/2} = |\det G|^{1/2},$$

где G — матрица Грама векторов Ae_i с элементами $\langle Ae_i, Ae_j \rangle$, где $e_1, \ldots, e_k$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^k$.

Если $k = n-1$, $Ae_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \alpha_i)$, где 1 на стоит на i-м месте и α_i — некоторые числа, то

$$\lambda_{n-1}(A(U)) = \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2}.$$

Доказательство. В самом деле, $G = A^*A$. Поэтому для доказательства первого утверждения надо воспользоваться тем, что $DA(x) = Ax$, а также упомянутой формулой для объема параллелограмма, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_k$ в $\mathbb{R}^k$. Для доказательства второго утверждения можно заметить, что получаемая в ней матрица Грама совпадает с матрицей квадратичной формы в $\mathbb{R}^{n-1}$, заданной формулой

$$Q(x) = \langle x, x \rangle + \langle \alpha, x \rangle^2, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Если $\alpha = 0$, то получаем единичную матрицу. Пусть $\alpha \neq 0$. Сделаем ортогональную замену координат в $\mathbb{R}^{n-1}$, при которой вектор $\alpha/|\alpha|$ станет первым базисным вектором. В новой системе координат наша квадратичная форма будет иметь вид

$$\langle y, y \rangle + |\alpha|^2 y_1^2 = (1 + |\alpha|^2) y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2,$$

ибо форма $\langle x, x\rangle$ не меняется при ортогональных заменах. Определитель диагональной матрицы полученной формы легко находится, но интересующий нас определитель с ним совпадает из-за ортогональности матрицы перехода. □

Из сказанного видно, что приближенно поверхностная мера множества $\varphi(U)$ задается как сумма k-мерных объемов параллелепипедов $Q_i = D\varphi(c_i)(U_i)$, равных образам при линейных отображениях $D\varphi(c_i)$ одинаковых маленьких кубиков U_i с центрами в точках c_i, на которые разбивается куб U. Сдвинутый параллелепипед $Q_i+\varphi(a_i)$ с точностью до малых порядка квадрата его ребер приближает образ кубика U_i при параметризации φ. Можно представлять себе набор параллелепипедов $Q_i+\varphi(a_i)$ как черепичное покрытие плоскими участками нелинейной поверхности $\varphi(U)$. Коэффициент искажения объема кубика U_i производной $D\varphi(c_i)$ как раз равен $G_\varphi(c_i)^{1/2}$. Таким образом, сумма объемов $Q_i+\varphi(a_i)$ есть римановская сумма для функции $G_\varphi^{1/2}$, построенная по делению куба U на кубики U_i и точкам c_i — их центрам.

Для переноса локального определения интеграла на общие многообразия воспользуемся гладким разбиением единицы. Нам нужен такой факт: для всякого k-мерного многообразия M в $\mathbb{R}^d$ найдется последовательность функций $\theta_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами:

(i) каждая функция θ_j равна вне некоторого компакта S_j содержащегося в элементарной k-ячейке K_j из M,

(ii) $0 \leqslant \theta_j \leqslant 1$, причем каждая точка из $\mathbb{R}^n$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом компактов S_j и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ясно, что в силу условия (ii) всякий компакт в $\mathbb{R}^n$ пересекается лишь с конечным числом множеств K_j, так что указанный выше ряд на самом деле на каждом компакте представляет собой конечную сумму.

Интеграл от функции f, непрерывной на M и равной нулю вне некоторого компакта, можно задать формулой

$$\int_M f\, d\lambda_k := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \theta_j f\, d\lambda_k.$$

Этой же формулой зададим интеграл от функции f на M с компактным носителем, интегрируемой по всем k-ячейкам в M (в смысле, известном читателю: по Риману или Лебегу). Наконец, функция f общего вида считается интегрируемой, если интегрируемы все функции $\theta_j f^+$ и $\theta_j f^-$, где $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$, причем сходятся ряды из их интегралов. Тогда полагаем

$$\int_M f\,d\lambda_k := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \theta_j f^+\,d\lambda_k - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \theta_j f^-\,d\lambda_k.$$

Можно показать, что это совпадает с общим определением интеграла по мере Хаусдорфа (для которого вовсе не требуется представление множества интегрирования в каком-то специальном виде).

3.6.5. Пример. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon (0,1) \to \mathbb{R}^n$ — инъективное непрерывно дифференцируемое отображение с производной φ', отличной от нуля. Тогда интеграл по мере λ_1 на кривой $\gamma := \varphi(0,1)$ вычисляется по формуле

$$\int_\gamma f(x)\,\lambda_1(dx) = \int_0^1 f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt,$$

где $|\varphi'(t)| = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}$. Длина компактной части γ_a^b этой кривой, являющейся образом отрезка $[a,b] \subset (0,1)$, равна

$$\lambda_1(\gamma_a^b) := \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt.$$

В данном случае каждая точка $\varphi(t)$ обладает окрестностью в γ, являющейся образом интервала J в $(0,1)$ с замыканием в $(0,1)$, При этом имеется только один элемент $\langle\varphi'(t), \varphi'(t)\rangle = |\varphi'(t)|^2$. Зачем нужно требование инъективности? Ведь и без этого требования образ интервала может быть многообразием размерности 1. Действительно, многообразием образ может и быть, однако считать интеграл по указанной формуле уже нельзя: по определению полагается покрыть компактный носитель рассматриваемой функции конечным числом образов интервалов, на которых есть инъективность, затем перейти к дизъюнктному набору множеству и уже тогда применять указанную формулу. Например, если мы имеем дело с многократно проходимой единичной окружностью, полученной как образ интервала при отображении $\varphi(t) = (\cos(2\pi N t), \sin(2\pi N t))$, $t \in (0,1)$, где N велико, то при интегрировании единицы (что должно бы дать длину окружности 2π), мы будем получать сколь угодно большие $2\pi N$.

Итак, этот пример показывает, что даже если многообразие явным образом задано как образ куба, локальную формулу из определения интеграла нельзя применять в общем случае, так что и здесь нужно разбиение единицы.

3.6.6. Пример. Пусть двумерное многообразие M в $\mathbb{R}^3$ задано как образ $U=(0,1)^2$ при инъективном непрерывно дифференцируемом отображении $\varphi\colon u\mapsto (x(u),y(u),z(u))$, для которого матрица производной $D\varphi$ имеет ранг 2 в каждой точке. Тогда интеграл по M по мере λ_2 вычисляется по формуле

$$\int_M f\,d\lambda_2=\int_U f(\varphi(u))\sqrt{E(u)G(u)-F(u)^2}\,du,$$

где

$$E(u)=(\partial_{u_1}x)^2+(\partial_{u_1}y)^2+(\partial_{u_1}z)^2,\ G(u)=(\partial_{u_2}x)^2+(\partial_{u_2}y)^2+(\partial_{u_2}z)^2,$$
$$F(u)=\partial_{u_1}x\partial_{u_2}x+\partial_{u_1}y\partial_{u_2}y+\partial_{u_1}z\partial_{u_2}z.$$

Действительно, в этом случае возникает двумерная матрица Грама с элементами

$$(\partial_{u_1}x)^2+(\partial_{u_1}y)^2+(\partial_{u_1}z)^2,\quad (\partial_{u_2}x)^2+(\partial_{u_2}y)^2+(\partial_{u_2}z)^2$$

по главной диагонали и числом $\partial_{u_1}x\partial_{u_2}x+\partial_{u_1}y\partial_{u_2}y+\partial_{u_1}z\partial_{u_2}z$ на двух остальных местах. Отметим еще, что

$$EG-F^2=A^2+B^2+C^2,$$

где

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u_1,u_2)},\quad B=\frac{D(z,x)}{D(u_1,u_2)},\quad C=\frac{D(x,y)}{D(u_1,u_2)},$$
$$\frac{D(x,y)}{D(u_1,u_2)}:=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2}\\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2}.\end{pmatrix}$$

3.6.7. Пример. Пусть g — непрерывно дифференцируемая функция на $U=(0,1)^n$ с ограниченным градиентом. Тогда ее график

$$\Gamma_g=\{(u,g(u))\colon\ x\in U\}$$

является n-мерным многообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$, причем интеграл от непрерывной ограниченной функции f по мере λ_n на нем вычисляется по формуле

$$\int_{\Gamma_g} f\,d\lambda_n=$$
$$=\int_U f(u_1,\ldots,u_n,g(u_1,\ldots,u_n))\sqrt{1+|\nabla g(u_1,\ldots,u_n)|^2}\,du_1\cdots du_n.$$

Для обоснования заметим, что график есть образ U при отображении

$$\varphi\colon\ u_1,\ldots,u_n\mapsto(u_1,\ldots,u_n,g(u_1,\ldots,u_n)),$$

которое очевидным образом непрерывно дифференцируемо. Ясно, что образ φ является элементарной n-ячейкой в $\mathbb{R}^{n+1}$. При этом

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,\partial_{u_i}g(u_1,\ldots,u_n)),$$

где 1 стоит на i-м месте. Следовательно, определитель соответствующей матрицы Грама равен $1+|\nabla g(u)|^2$ (см. пример 3.6.4). Вместо ограниченности градиента достаточно иметь его интегрируемость.

3.6.8. Замечание. Стоит отметить, что посредством доказанной формулы можно было бы определять поверхностную меру на графике. Таким способом можно задать поверхностную меру на графике липшицевой функции g, если применить известную теорему Радемахера, согласно которой градиент липшицевой функции g существует почти всюду по мере Лебега (разумеется, в этом случае надо пользоваться интегралом Лебега). При этом получится мера, пропорциональная мере Хаусдорфа H_{n-1} (или даже равная, если последняя сразу вводится с надлежащим множителем).

3.6.9. Пример. Найдем площадь поверхности сферы S_{n-1} радиуса 1 в $\mathbb{R}^n$. Она состоит из двух полусфер, достаточно найти площадь поверхности верхней полусферы, имеющей вид графика функции $f(x)=(1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2)^{1/2}$ на единичном шаре U_{n-1} в $\mathbb{R}^{n-1}$. Строго говоря, такая функция f не вполне подходит под рассмотренный выше пример, поскольку имеет неограниченный градиент, но охватывается более общим случаем, указанным в конце примера. Таким образом,

$$\lambda_{n-1}(S_{n-1})/2=\int_{U_{n-1}}(1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2)^{-1/2}\,dx.$$

Объемный $(n-1)$-мерный интеграл в правой части может быть вычислен более явно. При $n=2$ получаем π непосредственным вычислением. При $n=3$ получаем 2π переходом к полярным координатам (что приводит к вычислению интеграла от $r(1-r^2)^{-1/2}$ по r из $[0,1]$ и умножению его на 2π). В многомерном случае также можно использовать сферические координаты, но можно и заметить, что из-за сферической инвариантности подынтегральной функции мы получаем

$$(n-1)V_{n-1}\int_0^1(1-r^2)^{-1/2}r^{n-1}\,dr,$$

где V_{n-1} — объем U_{n-1}. Окончательный ответ получается вычислением последнего интеграла по индукции и подстановкой известного выражения для V_{n-1}. Ответ такой: если n четно, то

$$\lambda_{n-1}(S_{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{((n-2)/2)!},$$

для нечетного n имеем

$$\lambda_{n-1}(S_{n-1}) = \frac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{(n-2)!!},$$

где $(n-2)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)$ таков: Иной способ вывода выражения для $\lambda_{n-1}(S_{n-1})$ основан эту величину можно получить как предел отношения поверхностного слоя между сферами радиуса 1 и $1-h$ к h при $h \to 0$, т. е. предел $h^{-1}V_n(1-(1-h)^n)$, равный nV_n. Разумеется, этот способ хорош, если считать известным объем шара.

§ 3.7. Меры Хаара

Мера Лебега является важнейшим частным случаем более общей конструкции — меры Хаара на локально компактной сепарабельной метрической группы G, т.е. группы, на которой есть метрика, относительно которой операции умножения и взятия обратного непрерывны, причем G с этой метрикой — полное сепарабельное метрическое пространство, а точки обладают окрестностями с компактными замыканиями.

Ненулевая борелевская мера μ_L на G со значениями в $[0, +\infty]$, конечная на компактах, называется левоинвариантной мерой Хаара, если она инвариантна при всех отображениях $T_h\colon g \mapsto h \cdot g$ из G в G. Аналогично для умножения справа вводится правоинвариантная мера Хаара.

3.7.1. Теорема. *На группе G есть единственная с точностью до множителя левоинвариантная мера Хаара.*

Если группа G коммутативна или компактна, то мера Хаара двусторонне инвариантна.

На компактной группе мера Хаара конечна, а некомпактные являются счетными объединениями компактов (при наших предположениях), так что там мера Хаара σ-конечна. На конечной группе мера Хаара есть просто равномерное распределение с одинаковыми мерами точек. На связной недискретной группе мера Хаара равна нулю на точках.

Рассмотрим два важных конкретных примера.

Группа GL_n обратимых операторов в $\mathbb{R}^n$ является открытым подмножеством n^2-мерного линейного пространства L_n всех операторов в $\mathbb{R}^n$. На L_n есть обычная n^2-мерная мера Лебега λ_{n^2}. Дополнение к GL_n в L_n есть гиперплоскость $\{\det G = 0\}$ меры нуль. Поэтому меру Хаара естественно искать в виде $\mu = \varrho \cdot \lambda_{n^2}$.

3.7.2. Теорема. *Лево-инвариантная мера Хаара на* GL_n *задается относительно меры Лебега* λ_{n^2} *плотностью*

$$\varrho(X) = (\det X)^{-n}.$$

Доказательство — задача, для решения которой надо проверить, что мера с указанным свойством инвариантна при левых сдвигах.

Группа SO_n ортогональных операторов в $\mathbb{R}^n$ с определителем 1 компактна. Ее открытое подмножество операторов, заданное условием $\det(S-I) \neq 0$, обладает удобными координатами: линейное пространство K_n кососимметричных операторов в $\mathbb{R}^n$ взаимно-однозначно отображается на указанное подмножество посредством преобразования Кэли $T \mapsto (I+T)^{-1}(I-T)$. Обратное отображение имеет такой же вид: $U \mapsto (I+U)^{-1}(I-U)$.

3.7.3. Теорема. *Лево-инвариантная мера Хаара на* SO_n *задается относительно меры Лебега на* K_n *плотностью*

$$\varrho(X) = (\det(1 + XX^t))^{-(n-1)/2}.$$

Доказательство — полезное упражнение, несколько более трудное, чем предыдущее. Естественно, опять все сводится к проверке инвариантности указанной меры.

С помощью меры Хаара строится представление группы G унитарными операторами в комплексном пространстве $L^2(\mu_L)$: отображение $h \mapsto U_h$, где $U_h\varphi(g) = \varphi(h \cdot g)$, является гомоморфизмом в группу унитарных операторов.

Задачи

1. Доказать, что борелевская σ-алгебра прямой порождается как интервалами с рациональными концами, так и отрезками с рациональными концами.

2. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости порождается замкнутыми квадратами.

3. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости не порождается отрезками, а также не порождается кругами с центром в нуле.

4. Доказать, что всякая конечная σ-алгебра порождается множествами из конечного разбиения пространства на дизъюнктные множества.

5. Доказать, что всякое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ является счетным объединением кубов с попарно дизъюнктными внутренностями.

6. Доказать, что всякое множество из σ-алгебры, порожденной набором множеств, входит в σ-алгебру, порожденную некоторым не более чем счетным поднабором этих множеств.

7. Доказать, что в сепарабельном метрическом пространстве борелевская σ-алгебра порождается счетным набором открытых шаров.

8. Привести пример метрического пространства, в котором борелевская σ-алгебра строго шире σ-алгебры, порожденной всеми открытыми шарами.

9. Привести пример под-σ-алгебры борелевской σ-алгебры прямой, которая не порождается никаким счетным набором множеств.

10*. Привести пример σ-алгебры, в которой всякое непустое множество содержит непустое строго меньшее подмножество из этой σ-алгебры.

11*. Привести пример такой счетной последовательности интервалов, что она порождает борелевскую σ-алгебру, но никакая ее собственная часть уже не порождает борелевскую σ-алгебру.

12*. Доказать, что σ-алгебра, порожденная счетным набором множеств, имеет мощность не выше континуума.

13. Доказать счетную аддитивность меры m на подмножествах $\mathbb{N}$, заданную формулой $m(A) = \sum_{n\in A} p_n$, где $p_n \geqslant 0$, $\sum_n p_n < \infty$.

14. На алгебре $\mathcal{A}$, состоящей из конечных подмножеств $\mathbb{N}$ и их дополнений, дана функция m: $m(A) = 0$ для конечных A, $m(A) = 1$ для прочих A. Доказать, что m аддитивна и не счетно-аддитивна.

15. Доказать, что всякий набор компактов в $\mathbb{R}^n$ (или в общем топологическом пространстве) является компактным классом, т. е. если последовательность компактов K_n из него имеет пустое пересечение, то некоторое конечное их пересечение $\bigcap_{n=1}^{N} K_n$ пусто.

16. Привести пример бесконечного компактного класса, состоящего не из компактов.

17. Множество Кантора C получается из $[0,1]$ удалением открытой средней трети $(1/3, 2/3)$, затем средних третей оставшихся отрезков и т.д. по индукции. Доказать, что C — компакт континуальной мощности лебеговской меры нуль.

18. Доказать, что для каждого $q \in (0,1)$ в $[0,1]$ есть компакт лебеговской меры q, не имеющий внутренних точек.

19. Найти лебеговскую меру множества точек из $[0,1]$, не имеющих 1 в десятичной записи.

20. Доказать, что всякое множество положительной меры Лебега на прямой содержит неизмеримое подмножество.

21. Доказать, что всякое непустое открытое множество U в $\mathbb{R}^n$ с точностью до множества меры нуль есть объединение конечного или счетного набора дизъюнктных открытых шаров, содержащихся в U.

22. Доказать, что меру Лебега множества E в $\mathbb{R}^n$ можно задавать как точную нижнюю грань сумм $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(B_k)$ по наборам открытых шаров B_k, покрывающих E (вместо кубов, как в определении).

23*. Доказать, что прямую нельзя представить как объединение дизъюнктных отрезков, отличных от точек. Вывести из этого, что пространство нельзя представить как объединение замкнутых шаров ненулевых радиусов без общих внутренних точек.

24*. Доказать, что всякое объединение отрезков с ненулевыми длинами измеримо по Лебегу.

25. Дана последовательность измеримых функций f на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Доказать, что в $\mathcal{A}$ входят следующие множества:

(a) множество тех x, где есть конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$,

(b) множество тех x, где $f_n(x) \to +\infty$.

26. Доказать, что существуют такие всюду определенные измеримые по Лебегу функции, что их композиция неизмерима.

27. Привести пример измеримой по Лебегу функции на $[0,1]$, образ которой неизмерим.

28. Доказать, что измеримая по Лебегу функция на $[0,1]$ переводит измеримые множества в измеримые в точности тогда, когда множества меры нуль она переводит в множества меры нуль.

29. Построить пример гомеоморфизма отрезка, переводящего некоторое множество меры нуль в неизмеримое множество.

30. Привести пример измеримой по Лебегу ограниченной функции на $[0,1]$, которая не может быть поточечным пределом последовательности ступенчатых функций.

31. Пусть измеримые функции f_n на $[0,1]$ почти всюду сходятся к нулю. Доказать, что найдутся такие числа $C_n \to +\infty$, что функции $C_n f_n$ также почти всюду сходятся к нулю.

32. (a) Дана последовательность измеримых функций f_n на $[0,1]$. Доказать, что найдутся такие числа $\varepsilon_n > 0$, что функции $\varepsilon_n f_n$ почти всюду сходятся к нулю. (b)* Доказать, что найдется такая последовательность функций g_n на $[0,1]$, что нельзя найти числа $\varepsilon_n > 0$, для которых $\varepsilon_n g_n(x) \to 0$ для всех x.

33*. Доказать, что если аддитивная функция f на прямой ограничена на множестве положительной меры Лебега, то она непрерывна.

34*. Доказать, что существует такая измеримая по Лебегу всюду определенная функция f на $[0,1]$, что нет борелевской функции g, для которой $f(x) \leqslant g(x)$ при всех x.

35. Выяснить, при каких α функция $|\cos x|^\alpha$ интегрируема на $[0,2\pi]$.

36. Выяснить, при каких α функция $|\ln x|^\alpha$ интегрируема (a) на $[0,1/2]$, (b) на $[0,1]$.

37. Выяснить, при каких α и β функция $x^\alpha |\ln x|^\beta$ интегрируема на $[0,1]$.

38. Пусть f — интегрируемая по всей прямой функция. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^\infty f(x+n)$ абсолютно сходится почти всюду.

39. Положительные функции f_n сходятся к функции f в $L^1[0,1]$. Доказать, что $\sqrt{f_n} \to \sqrt{f}$ в $L^2[0,1]$.

40. Пусть f — ограниченная измеримая функция на $[0,1]$, причем

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx = \int_0^1 f(x)^3\,dx = \int_0^1 f(x)^4\,dx.$$

Доказать, что f совпадает почти всюду с индикатором множества.

41. Пусть f — положительная функция на $[0,1]$ с единичным интегралом, причем $f\ln f$ интегрируема. Доказать неравенство

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)\,dx \geqslant 0.$$

42*. Пусть E — множество положительной меры в $[0,2\pi]$. Доказать, что

$$\inf_n \int_E |\cos nx|\,dx > 0.$$

43*. Пусть f — интегрируемая функция на $[0,1]$, имеющая нулевой интеграл по всякому множеству меры $3/4$. Доказать, что $f(x)=0$ почти всюду.

44*. Доказать, что на пространстве многочленов на $[0,1]$ нельзя ввести такую топологию, что сходимость счетных последовательностей в ней равносильна сходимости почти всюду на $[0,1]$.

45. Привести пример неинтегрируемой измеримой функции на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, для которой оба повторных интеграла конечны и равны.

46. Привести пример измеримой функции на $[0,1]\times[0,1]$, для которой оба повторных интеграла конечны, но не равны.

47. Привести пример измеримой функции на $[0,1]\times[0,1]$, для которой один из повторных интегралов конечен, а другой бесконечен.

48. Доказать теорему Тонелли: если неотрицательная измеримая функция f на произведении пространств с мерой имеет конечный повторный интеграл, то она интегрируема.

49. Найти объем шара и объем правильного симплекса в $\mathbb{R}^n$.

50. Доказать, что график борелевской функции на отрезке имеет меру нуль в плоскости.

51. Пусть $f\in L^2[0,1]$. Доказать равенство

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx = 2\int_0^\infty t\lambda(x\colon |f(x)|>t)\,dt.$$

52. Пусть f и g интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, причем f ограничена. Доказать, что свертка $f*g$ непрерывна.

53. Привести пример вероятностной борелевской меры на отрезке, взаимно сингулярной с мерой Лебега, но равной нулю во всех точках.

54. Доказать, что меру Лебегу на $[0,1]$ можно перевести во всякую борелевскую вероятностную меру на $[0,1]$ борелевской функцией.

ЛИСТОК 1.

1. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости порождается замкнутыми правильными треугольниками.

2. Доказать, что борелевская σ-алгебра плоскости не порождается параболами.

3. Доказать, что совокупность пересечений борелевских подмножеств плоскости с прямой есть в точности борелевская σ-алгебра прямой.

4. Привести пример борелевского множества, которое не является счетным объединением замкнутых множеств.

5. Пусть A_n — последовательность множеств из σ-алгебры $\mathcal{A}$. Доказать, что в $\mathcal{A}$ входит множество всех точек, принадлежащих бесконечно многим A_n.

6. Доказать, что для каждого $q \in (0,1)$ в $[0,1] \times [0,1]$ есть компакт лебеговской меры q, не имеющий внутренних точек.

7. Пусть A — множество положительной меры Лебега на прямой. Доказать, что множество разностей $A - A = \{a_1 - a_2 \colon a_1, a_2 \in A\}$ содержит интервал.

8. Построить измеримое по Лебегу множество на плоскости с неизмеримыми проекциями на координатные оси.

9. Доказать, что если две борелевские меры на $[0,1]$ имеют равные значения на всех отрезках, то они равны.

10. Привести пример двух различных вероятностных мер на σ-алгебре, значения которых совпадают на некотором классе множеств, порождающих эту σ-алгебру.

ЛИСТОК 2.

1. Привести пример неборелевской функции f на отрезке, для которой все множества $f^{-1}(c)$ борелевские.

2. Привести пример двух измеримых по Лебегу функций на отрезке, композиция которых неизмерима.

3. Функция f измерима по Лебегу на отрезке $[0,1]$, функция g из $[0,1]$ в $[0,1]$ непрерывна. Верно ли, что измерима композиция $f \circ g$?

4. Выяснить, при каких α и β функция $(\sin x)^\alpha x^\beta$ интегрируема по Лебегу на $[0,1]$.

5. При каких α функция $|x|^\alpha$ интегрируема по шару с центром в нуле в $\mathbb{R}^n$?

6. Измеримые по Лебегу функции $f_n \geqslant 0$ на отрезке сходятся почти всюду к нулю. Верно ли, что интегралы от $f_n e^{-f_n}$ стремятся к нулю?

7. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_0^1 (\sin\sin\sin t)^n \, dt \right)^{1/n}$.

8. Функция f на $[0,1]\times[0,1]$ такова, что все функции $x\mapsto f(x,t)$ интегрируемы, а все функции $t\mapsto f(x,t)$ непрерывны. Доказать, что функция $t\mapsto \int_0^1 f(x,t)\,dx$ является борелевской.

9. Непрерывные функции f_n на отрезке сходятся поточечно к нулю, а интегралы от f_n^2 равномерно ограничены. Доказать, что интегралы от f_n стремятся к нулю.

10. Доказать, что если две вероятностные борелевские меры на прямой приписывают равные интегралы каждой ограниченной непрерывной функции, то они равны.

Листок 3.

1. Найти интеграл от $|x|^p$ по половине единичного шара в $\mathbb{R}^3$ при тех p, для которых он конечен.

2. Найти интеграл функции $|\sin(x-y)|$ по квадрату $[0,\pi]^2$.

3. Выяснить, при каких $\alpha\in\mathbb{R}$ функция $(\sin|x|)^\alpha$ на $\mathbb{R}^n$ интегрируема по множеству $\{x\colon |x|\leqslant 1, x_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,n\}$.

4. (a) Вычислить интеграл функции x^2y^2 по кругу радиуса π с центром в нуле. (b) Вычислить интеграл функции x^2+y^2 по множеству $|x|+|y|\leqslant 1$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$, где $0<p<q$, $0<r<s$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

7. Найти интеграл от функции $\sqrt{x^2+y^2}$ по области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной поверхностями $z^2=x^2+y^2$, $z=1$.

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

9. Выяснить, интегрируемо ли преобразование Фурье индикатора квадрата $[0,1]^2$ в $\mathbb{R}^2$.

10. Пусть $A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — линейный оператор, $e_1,\ldots,e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что мера параллелепипеда, порожденного векторами $Ae_1,\ldots,Ae_n$, равна $|\det(A^*A)|^{1/2}$, а также $|\det G|^{1/2}$, где G — матрица Грама с элементами $\langle Ae_i, Ae_j\rangle$.

Программа курса

1. Алгебры и σ-алгебры. Борелевская σ-алгебра. Борелевская σ-алгебра прямой порождается лучами, но не точками.
2. Аддитивность и счетная аддитивность. Пример аддитивной, но не счетно-аддитивной функции на алгебре. Равносильность счетной аддитивности и непрерывности в нуле для аддитивной функции на алгебре.
3. Компактные классы множеств. Компактность класса компактных множеств. Счетная аддитивность аддитивной функции на алгебре, имеющей компактный приближающий класс. Формулировка теоремы о приближении компактами для борелевских мер.
4. Внешняя мера, порожденная счетно-аддитивной мерой на алгебре. Основные свойства. Определение измеримости по Лебегу.
5. Формулировка теоремы о внешней мере на классе измеримых множеств. Пример Витали неизмеримого множества.
6. Построение классической меры Лебега на отрезке и кубе. Мера Лебега на всем пространстве, ее основные свойства (трансляционная и сферическая инвариантность).
7. Измеримые функции и их основные свойства. Измеримые функции как пределы простых функций.
8. Теорема Егорова. Теорема Лузина.
9. Определение интеграла Лебега для простых функций и общее определение. Простейшие свойства интеграла Лебега. Неравенство Чебышёва.
10. Линейность интеграла Лебега. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
11. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.
12. Теорема Беппо Леви о монотонной сходимости. Теорема Фату. Критерий интегрируемости.
13. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
14. Неравенство Йенсена.

15. Неравенства Гёльдера и Коши – Буняковского.
16. Неравенство Минковского и определение пространств L^p.
17. Полнота пространства L^1.
18. Произведение мер. Теорема о монотонных классах (формулировка) и ее применение к обоснованию определения произведения мер.
19. Теорема Фубини.
20. Свертка интегрируемых функций.
21. Формулировка теоремы Рисса о непрерывных линейных функциях на L^2. Теорема Радона – Никодима (вывод из теоремы Рисса).
22. Образ меры при отображении. Общая формула замены переменных. Формула замены переменных при диффеоморфизмах (формулировка).
23. Функции ограниченной вариации. Абсолютно непрерывные функции (определение и доказательство ограниченности вариации). Теорема о дифференцируемости почти всюду (формулировка).
24. Описание абсолютно непрерывных функций через неопределенные интегралы (формулировка). Теорема Ньютона – Лейбница для абсолютно непрерывных функций (формулировка). Вывод формулы интегрирования по частям для абсолютно непрерывных функций.

Литература

[1] Богачев В.И. Функциональный анализ. ПСТГУ, М., 2011.
[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. ИКИ, Москва – Ижевск, 2004; 496 с.
[3] Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. Теория меры и тонкие свойства функций. Науч. книга, Новосибирск, 2002; 206 с.