

Математический анализ

Лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов *

Факультет математики ВШЭ, 2020 г. 2 семестр

Лекция 1 (14 января 2020)

В курсе топологии вы изучали топологические пространства и, в частности, метрические пространства, т.е., множества, в которых введено понятие близости элементов, а в курсе алгебры вы изучали линейные пространства. В математическом анализе эти понятия объединяются, т.к. приходится иметь дело с пространствами, в которых введены как операции сложения элементов и умножения их на числа, так и некоторая топология или метрика. Важный класс таких пространств образуют нормированные пространства. Вы уже имели дело с конечномерными евклидовыми пространствами. Теперь мы обобщим это понятие для бесконечномерных пространств. Это теория была развита в работах Стефана Банаха и других математиков.

Норма и нормированное пространство

Пусть L – линейное пространство над полем вещественных (\mathbb{R}) или комплексных (\mathbb{C}) чисел.

Определение 1 *Вещественный функционал на L называется нормой и обозначается $\|x\| = \|x\|_L$, если выполнены следующие условия*

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ влечет $x = 0$ (положительность);
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in L$ (неравенство треугольника);
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall x \in L$, \forall числа α (однородность).

Определение 2 *Линейное пространство L , на котором задана некоторая норма $\|\cdot\|$ называется нормированным пространством.*

Всякое нормированное пространство становится метрическим пространством, если ввести в нем расстояние (метрику):

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Аксиомы метрического пространства легко проверяются.

*Компьютерный набор и верстка Антон Жевнерчук и Тимур Степанов.

Определение 3 Полное нормированное пространство называется банаховым пространством, т.е., в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Примеры нормированных пространств

Пример 1 Прямая \mathbb{R}^1 становится нормированным пространством, если для числа $x \in \mathbb{R}^1$ положить

$$\|x\| = |x|.$$

Пример 2 В вещественном n -мерном пространстве \mathbb{R}^n с элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$, норма равна

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Все аксиомы нормы выполнены. Формула

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

определяет в \mathbb{R}^n стандартную евклидову метрику. Однако, в этом пространстве можно ввести и другие нормы, например,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \text{или} \quad (1)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} |x_k|. \quad (2)$$

Аксиомы нормы легко проверяются.

Пример 3 В комплексном n -мерном пространстве \mathbb{C}^n вводится аналогичная норма

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2},$$

а также нормы (1) или (2).

Пример 4 В пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ определим норму

$$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Пример 5 Рассмотрим пространство ℓ_∞ , элементами которого служат ограниченные числовые последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Положим

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|.$$

Возникает нормированное пространство.

Все приведенные примеры являются полными метрическими пространствами, т.е., эти нормированные пространства являются банаховыми.

Пример 6 Рассмотрим пространство $C[a, b]$ с другой нормой

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Легко проверить, что это действительно норма, но пространство не полное. Постройте пример фундаментальной последовательности, которая не имеет предела в этом пространстве.

Линейные многообразия и подпространства в нормированном пространстве

В теории линейных пространств принято определять подпространство, как подмножество $L_0 \subseteq L$, которое замкнуто относительно сложения и умножения на числа, т.е., если $x, y \in L_0$, то $\alpha x + \beta y \in L_0$ для любых чисел α и β . В теории нормированных пространств такие множества называются линейными многообразиями. Основным интересом представляют замкнутые линейные многообразия, содержащие все свои предельные точки.

Определение 4 *Замкнутое линейное многообразие называется подпространством нормированного пространства.*

В конечномерном нормированном пространстве всякое линейное подпространство автоматически является замкнутым (докажите это). В бесконечномерном случае это не всегда так. Например, в пространстве $C[a, b]$ многочлены образуют линейное многообразие, которое не замкнуто (как в этом убедиться?)

Другой пример. В пространстве ℓ_∞ ограниченных последовательностей рассмотрим финитные последовательности, т.е., такие последовательности, у которых лишь конечное число членов отлично от нуля. Такие последовательности образуют незамкнутое линейное многообразие.

Введем еще одно важное понятие. Пусть задана система элементов $\{x_\alpha\}$ в нормированном пространстве L . Подпространством, порожденным системой $\{x_\alpha\}$ называется наименьшее (замкнутое) подпространство, содержащее $\{x_\alpha\}$. Наконец, система $\{x_\alpha\}$ в нормированном пространстве называется полной, если порожденное ею (замкнутое) подпространство, совпадает со всем L .

Например в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций полной является система многочленов $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ (это вытекает из теоремы Вейерштрасса, которую мы докажем позже).

Пространство L_1

Рассмотрим теперь очень важный пример нормированного пространства. Пусть на множестве X задана мера μ (конечная или бесконечная), и пусть мера μ является полной (т.е., любое подмножество множества меры нуль измеримо).

Рассмотрим совокупность всех функций f (вещественных или комплексных), суммируемых на X по мере μ . Очевидно, она образует линейное пространство, поскольку

операции сложения и умножения на число замкнуты относительно суммируемых функций. Это пространство обозначается $L_1(X, \mu)$ или L_1 .

Введем норму в L_1 :

$$\|f\| := \int_X |f(x)| d\mu. \quad (3)$$

Ясно, что

1. $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$, $\forall f \in L_1$, для любого числа α ;
2. $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$, $\forall f_1, f_2 \in L_1$.

Однако, чтобы выполнялось последнее (или первое) свойство нормы: $\|f\| > 0$ если $f \neq 0$, необходимо считать, что функции, эквивалентные друг другу на X по мере μ , не различаются, а считаются одним элементом. В частности, нулевой элемент – это совокупность всех функций, равных нулю почти всюду в X .

Определение 5 *Пространством $L_1(X, \mu)$ называется нормированное пространство, элементами которого служат классы функций, эквивалентных по мере μ . Сложение элементов и умножение на число определяется по обычным правилам, а норма задается формулой (3).*

В пространстве L_1 расстояние определяется формулой

$$\rho(f, g) := \|f - g\| = \int_X |f(x) - g(x)| d\mu.$$

Сходимость последовательности суммируемых функций в смысле этого расстояния называется сходимостью в среднем.

Пространство L_1 можно считать состоящим из комплексных функций (комплексное L_1) или из одних действительных функций (действительное L_1).

Обсудим полноту пространства L_1 .

Теорема 1 *Пространство L_1 является полным, т.е. это банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность в L_1 , т.е.,

$$\|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty.$$

Тогда из последовательности $\{f_n\}$ можно выделить быстро сходящуюся подпоследовательность, т.е., такую $\{f_{n_k}\}$, что

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = \int_X |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| d\mu \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Из этого неравенства и из теоремы Бешпо-Леви вытекает, что следующий ряд

$$|f_{n_1}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)| + \dots + |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| + \dots$$

сходится почти всюду в X . Но тогда и ряд

$$f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + \dots + (f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)) + \dots$$

сходится почти всюду в X к некоторой измеримой функции $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$.

Значит, фундаментальная (в L_1) последовательность $\{f_n\}$ содержит подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

Покажем, что $\{f_{n_k}\}$ сходится к f в пространстве L_1 . В силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$, при любом $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших k и l имеем

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Тогда по теореме Фату в этом неравенстве можно перейти к пределу под знаком интеграла при $l \rightarrow \infty$. Получаем

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Откуда заключаем, что $f \in L_1$ и что $f_{n_k} \rightarrow f$ в пространстве L_1 . Но тогда и вся фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в L_1 . ■

Всюду плотные множества в L_1

Как известно, для всякой функции $f(x)$, суммируемой на X , и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая простая суммируемая функция $\varphi(x)$, что

$$\int_X |f(x) - \varphi(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Далее, поскольку для простой суммируемой функции, которая принимает значения y_1, y_2, \dots на множествах E_1, E_2, \dots , интеграл определяется как сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(E_k),$$

при условии его абсолютной сходимости, ясно, что простую функцию можно представить как предел (в среднем) последовательности простых функций, которые принимают лишь конечное множество значений. То же самое верно для любой функции из L_1 .

В заключение рассмотрим случай, когда $X \subseteq \mathbb{R}^n$, а μ – это мера Лебега в \mathbb{R}^n . В этом случае каждое измеримое множество E можно приблизить с помощью конечного набора параллелепипедов с рациональными вершинами. Приходим к следующему

Утверждение 1 *Пространство $L_1(X, dx)$ содержит счетное всюду плотное множество, состоящее из простых функций, принимающих конечное множество значений, иными словами, пространство $L_1(X, dx)$ является сепарабельным.*

Сформулируем еще одну теорему.

Теорема 2 *Множество всех непрерывных функций $C(X)$ всюду плотно в $L_1(X, dx)$.*

Доказательство. В силу сказанного выше достаточно доказать, что всякая простая функция, принимающая конечное множество значений, является пределом в среднем последовательности непрерывных функций. Отметим, что всякая такая простая функция есть (конечная) линейная комбинация индикаторов $\chi_M(x)$ измеримых множеств конечной меры, поэтому достаточно доказать утверждение для индикаторных функций. Пусть M – измеримое подмножество X и $\mu(M) < \infty$. Напомним следующий факт про меру Лебега: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество F_M и открытое множество G_M такие, что

$$F_M \subseteq M \subseteq G_M \subseteq X \text{ и } \mu(G_M) - \mu(F_M) < \varepsilon.$$

Определим теперь функцию

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G_M)}{\rho(x, X \setminus G_M) + \rho(x, F_M)},$$

где $\rho(x, A)$ – обозначает расстояние от точки x до множества A . Эта функция равна нулю при $x \in X \setminus G_M$ и равна 1 при $x \in F_M$. Она непрерывна, так как обе функции $\rho(x, X \setminus G_M)$ и $\rho(x, F_M)$ непрерывны и их сумма нигде не обращается в ноль. Осталось заметить, что функция $|\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|$ не превосходит 1 на $G_M \setminus F_M$ и равна нулю вне этого множества. Следовательно,

$$\int_X |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon,$$

откуда вытекает утверждение теоремы. ■

Лекция 2 (21 января 2020)

§1. Евклидово пространство

Пусть задано действительное линейное пространство E . Напомним, что скалярным произведением в E называется действительная функция (x, y) определенная для каждой пары элементов $x, y \in E$, такая что:

- 1) $(x, y) = (y, x)$,
- 2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
- 4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Определение 1 *Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется евклидовым пространством.*

В евклидовом пространстве E вводится норма по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Из свойств 1) - 4) следует, что выполнены все свойства нормы. Неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

которое мы докажем. Рассмотрим квадратичный трехчлен от действительной переменной λ :

$$\phi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \|x\|^2\lambda^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2,$$

который, очевидно, неотрицателен $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, т.к. $\phi(\lambda)$ это скалярный квадрат некоторого вектора. Следовательно, дискриминант этого трехчлена меньше или равен нулю, т. е.

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0. \quad (1)$$

Отметим, что в евклидовом пространстве сумма, умножение на число и скалярное произведение непрерывны, т. е., если $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ (в смысле сходимости по норме), $\lambda_n \rightarrow \lambda$ (как числовая последовательность), то

$$x_n + y_n \rightarrow x + y, \quad \lambda_n x_n \rightarrow \lambda x, \quad (x_n, y_n) \rightarrow (x, y).$$

Это вытекает из неравенства Коши-Буняковского.

Наличие в E скалярного произведения позволяет ввести в этом пространстве не только норму (т. е. длину) вектора, но и угол между векторами: а именно угол φ между x и y определяется формулой

$$-1 \leq \cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \quad (\text{нер-во Коши-Буняковского}). \quad (2)$$

Следовательно, эта формула определяет некоторый угол $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Если $(x, y) = 0$, то из (2) получаем $\varphi = \frac{\pi}{2}$, в этом случае векторы x и y называются ортогональными.

Определение 2 Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\}$ в E называется ортогональной, если

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta.$$

Утверждение 1 Если векторы $\{x_\alpha\}$ ортогональны, то они линейно независимы.

Доказательство. В самом деле, пусть

$$a_1x_{\alpha_1} + a_2x_{\alpha_2} + \dots + a_nx_{\alpha_n} = 0.$$

Поскольку $\{x_\alpha\}$ – ортогональная система, имеем

$$(x_{\alpha_i}, a_1x_{\alpha_1} + a_2x_{\alpha_2} + \dots + a_nx_{\alpha_n}) = a_i(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) = 0.$$

Но $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$ и, значит, $a_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$ ■

Определение 3 Если ортогональная система $\{x_\alpha\}$ полна, т. е. наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство есть все E , то $\{x_\alpha\}$ называется ортогональным базисом. Если при этом норма любого вектора равна 1, то система $\{x_\alpha\}$ называется ортогональным нормированным базисом или ортонормированным базисом в E .

§2. Примеры евклидовых пространств и ортогональных базисов

Пример 1 n -мерное вещественное пространство \mathbb{R}^n .

Элементы – системы вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – образуют линейное векторное пространство со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \tag{3}$$

Ортогональный нормированный базис в \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Пример 2 Пространство ℓ_2 с элементами

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \text{ где } \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Абсолютная сходимость этого ряда следует из сходимости рядов $\sum_{i=k}^{\infty} x_k^2$, $\sum_{i=k}^{\infty} y_k^2$ и из неравенства Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^2 \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^2$$

(по критерию Коши сходимости рядов).

Свойства 1) – 4) скалярного произведения проверяются непосредственно. Простейший ортогональный базис в ℓ_2 :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, \dots) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots) \end{aligned}$$

Проверим полноту этой системы. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ – любой вектор из ℓ_2 и $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Тогда $x^{(n)}$ – это линейная комбинация e_1, \dots, e_n, \dots и при этом $\|x - x^{(n)}\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Пример 3 Пространство $C_2[a, b]$, состоящее из непрерывных действительных функций, со скалярным произведением

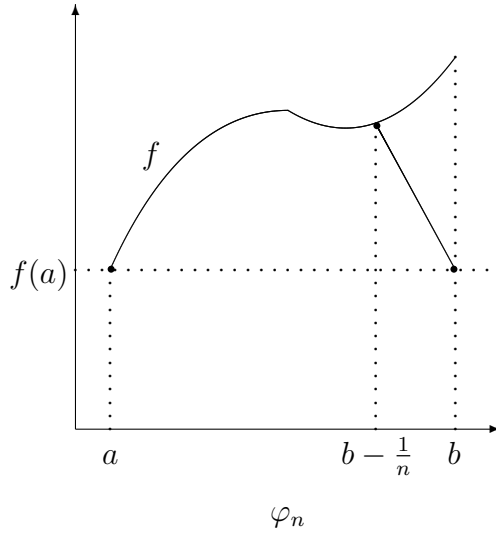
$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (4)$$

Важный ортогональный базис – тригонометрическая система, состоящая из функций

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi}{b-a}nt, \sin \frac{2\pi}{b-a}nt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Ортогональность проверяется непосредственно. На отрезке $[-\pi, \pi]$ получаем тригонометрическую систему: $\frac{1}{2}, \cos nt, \sin nt$.

Система (5) полна. Действительно, по теореме Вейерштрасса, всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция φ , принимающая на концах отрезка одинаковые значения, может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических полиномов, т. е. линейных комбинаций элементов системы (5). Такая последовательность сходится к функции φ по норме $C_2[a, b]$. Если же f – произвольная функция из $C_2[a, b]$, то ее можно представить как предел (по норме $C_2[a, b]$) последовательности функций φ_n , каждая из которых совпадает с f на отрезке $[a, b - \frac{1}{n}]$, линейная на $[b - \frac{1}{n}, b]$ и имеет в точке b значение $f(a)$. Следовательно, f можно приблизить сколь угодно точно (в метрике $C_2[a, b]$) линейными комбинациями системы (5). К доказательству теоремы Вейерштрасса мы еще вернемся в этом курсе.



§3. Существование ортогональных базисов. Ортогонализация

Теперь мы будем рассматривать сепарабельные евклидовы пространства, т. е. содержащие счетное всюду плотное множество. В приведенных выше примерах все пространства сепарабельные.

Утверждение 1 *В сепарабельном пространстве всякая ортогональная система не более чем счетна.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемая ортогональная система $\{\varphi_\alpha\}$ является нормированной (иначе заменим ее на систему $\left\{\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right\}$). При этом $\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}, \alpha \neq \beta$.

Рассмотрим совокупность шаров $B(\varphi_\alpha, 1/2)$. Эти шары не пересекаются. Если счетное множество $\{\psi_k\}$ всюду плотно в E , то в каждом таком шаре есть какой-то элемент из $\{\psi_k\}$. Следовательно, число таких шаров, а значит и элементов φ_α , не более чем счетно. ■

Теорема 1 (Об ортогонализации) *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ – линейно независимая система в евклидовом пространстве E . Тогда в E существует система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. Система $\{\varphi_n\}$ ортогональная и нормированная.
2. Каждый элемент φ_n есть линейная комбинация элементов f_1, f_2, \dots, f_n :

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n, \text{ причем } a_{nn} \neq 0.$$
3. Каждый элемент f_n представим в виде $f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{nn}\varphi_n$, причем $b_{nn} \neq 0$.

Каждый элемент системы $\{\varphi_n\}$ определяется условиями 1) – 3) однозначно с точностью до множителя ± 1 .

Доказательство. Элемент φ_1 ищется в виде $a_{11}f_1$. При этом a_{11} определяется из условия

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1, \text{ т. е. } a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{(f_1, f_1)}.$$

Ясно, что φ_1 определяется однозначно (с точностью до знака). Пусть φ_k ($k < n$), удовлетворяющие условиям 1) – 3), уже построены. Тогда f_n можно представить в виде

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1} + h_n, \text{ где } (h_n, \varphi_k) = 0 \text{ при } k < n.$$

Действительно, соответствующие коэффициенты $b_{n,k}$, а значит и h_n , однозначно определяются из условий

$$0 = (h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) - b_{n,k}(\varphi_k, \varphi_k),$$

то есть,

$$b_{n,k} = (f_n, \varphi_k).$$

Очевидно, что $(h_n, h_n) > 0$ (предположение $(h_n, h_n) = 0$ противоречило бы линейной независимости системы f_1, f_2, \dots, f_n). Положим $\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}$.

Из индуктивного построения ясно, что h_n , а значит и φ_n , выражаются через векторы f_1, f_2, \dots, f_n , т. е. $\varphi_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n$, где $a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0$. Кроме того, $(\varphi_n, \varphi_n) = 1$, $(\varphi_n, \varphi_k) = 0$ при $k < n$ и $f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{nn}\varphi_n$, где $b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0$. Т. е. φ_n удовлетворяет условиям 1) – 3) ■

Переход от системы $\{f_n\}$ к системе $\{\varphi_n\}$ называется процессом ортогонализации. Ясно, что подпространства, порожденные этими системами, совпадают между собой. Поэтому они полны или не полны одновременно.

Следствие 1 В сепарабельном евклидовом пространстве E существует ортогональный нормированный базис.

Доказательство. Действительно, пусть $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ – счетное всюду плотное множество в E . Выберем из него полную линейно независимую систему векторов $\{f_n\}$. Для этого из $\{\psi_n\}$ достаточно исключить все те элементы ψ_k , которые можно представить как линейную комбинацию ψ_i с номерами $i < k$.

Применив к полученной полной системе процесс ортогонализации, мы построим ортогональный нормированный базис. ■

Лекция 3 (28 января 2020)

§1. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы

Выбрав в n -мерном евклидовом пространстве ортогональный нормированный базис

$$e_1, e_2, \dots, e_n,$$

каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно записать в виде

$$x = \sum_{k=1}^n c_k e_k, \text{ где } c_k = (x, e_k). \quad (1)$$

Выясним, как можно обобщить разложение (1) на случай вещественных бесконечномерных пространств.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ – ортогональная нормированная система в пространстве E , $f \in E$ – произвольный элемент. Сопоставим элементу f последовательность чисел

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

которые будем называть координатами или коэффициентами Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$, и ряд (пока формальный)

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad (2)$$

который мы будем называть рядом Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$.

Возникает вопрос: сходится ли ряд (2), т. е. стремится ли последовательность ее частичных сумм (в смысле метрики E) к какому-нибудь пределу, и если сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом f ?

Предварительная задача: по заданному $n \in \mathbb{N}$ подобрать коэффициенты α_k ($k = 1, \dots, n$) так, чтобы расстояние между f_n и суммой

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \quad (3)$$

было минимальным.

Вычислим это расстояние. Поскольку система $\{\varphi_k\}$ ортогональна и нормирована, то

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) = (f, f) - 2 \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - c_k)^2. \end{aligned}$$

Здесь $\|f\|^2$ и $\sum_{k=1}^n c_k^2$ – фиксированные числа. Поэтому минимум этого выражения достигается, когда последняя сумма равна нулю, т. е. при $\alpha_k = c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. В этом случае

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \quad (4)$$

Мы показали, что среди всех сумм вида (3) при данном n наименее уклоняется от f частичная сумма ряда Фурье элемента f . Геометрически это означает, что длина перпендикуляра, опущенного из данной точки f на гиперплоскость, порожденную векторами φ_k , $k = 1, \dots, n$, меньше чем длина любой наклонной, проведенной из этой же точки.

Поскольку всегда $\|f - S_n\|^2 \geq 0$, то из полученного тождества следует, что

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Здесь n произвольно, а правая часть не зависит от n . Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится и его сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя.

Геометрически: сумма квадратов проекций вектора f на взаимно перпендикулярные направления не превосходит квадрата длины самого вектора f .

Определение 1 *Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ называется замкнутой, если для любого $f \in E$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2,$$

которое называется равенством Парсеваля.

Из тождества (4) следует, что замкнутость системы $\{\varphi_k\}$ равносильна тому, что для каждого $f \in E$ частичные суммы ряда Фурье $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ сходятся к f .

Установим связь понятия замкнутости с введенным ранее понятием полноты ортонормированной системы.

Теорема 1 *В сепарабельном евклидовом пространстве E всякая полная ортогональная нормированная система является замкнутой и наоборот.*

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}$ замкнута, тогда для любого $f \in E$ последовательность частичных сумм его ряда Фурье сходится к f . Это означает, что линейные комбинации элементов системы $\{\varphi_n\}$ всюду плотны в E , т. е. эта система полна.

Обратно, пусть система полна, т. е. любой элемент $f \in E$ можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$. Как мы установили, линейная комбинация $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ (частичная сумма ряда Фурье) дает самую точную аппроксимацию.

Следовательно ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ сходится к f и равенство Парсеваля имеет место. ■

На прошлой лекции мы доказали существование полных ортогональных нормированных систем в сепарабельном евклидовом пространстве. Следовательно, установили существование и замкнутых систем.

Утверждение 1 Если система $\{\varphi_n\}$ замкнута в E , то любой элемент $f \in E$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

Доказательство. Действительно, если f и g имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то у $f - g$ все коэффициенты Фурье равны нулю и по равенству Парсеваля $\|f - g\|^2 = 0$. ■

Утверждение 2 Если система $\{\varphi_n\}$ замкнута в E , то справедливо равенство Парсеваля для скалярного произведения: для любых векторов f и g из E

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k, \text{ где } a_k = (f, \varphi_k), \text{ } b_k = (g, \varphi_k).$$

Доказательство. Заметим, что в любом евклидовом пространстве

$$(f, g) = \frac{1}{2} [\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2].$$

Коэффициентами Фурье вектора $f + g$ являются числа $a_k + b_k$. Следовательно, по равенству Парсеваля

$$(f, g) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 - a_k^2 - b_k^2 \right] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k.$$

■ Мы рассматривали ортогональные нормированные системы. Однако можно переформулировать понятие коэффициентов Фурье, ряда Фурье и т. д. и для любой ортогональной системы. Пусть $\{\varphi_k\}$ – произвольная ортогональная система. По ней можно построить нормированную систему, состоящую из элементов $\psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$. Для любого $f \in E$ имеем:

$$c_n = (f, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|} (f, \varphi_n)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

где $a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$, т. е. $c_n = a_n \cdot \|\varphi_n\|$.

Коэффициент a_k называется коэффициентом Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_n\}$. Тогда, например, неравенство Бесселя примет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 \cdot a_n^2 \leq \|f\|^2.$$

§2. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса-Фишера

Будем предполагать, что рассматриваемые сепарабельные пространства являются полными, т.е. любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Пусть $\{\varphi_n\}$ – некоторая ортогональная нормированная система в E (не обязательно полная). Из неравенства Бесселя вытекает, что для того, чтобы числа $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ служили коэффициентами Фурье какого-то элемента $f \in E$, необходимо чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходилась.

Оказывается, что в полном евклидовом пространстве это условие является и достаточным.

Теорема 2 (Рисс-Фишер) Пусть $\{\varphi_n\}$ – произвольная ортогональная нормированная система в полном евклидовом пространстве E , и пусть числа $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Тогда существует единственный элемент f , что

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, n, \dots \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^2| = (f, f) = \|f\|^2.$$

Доказательство. Положим

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k.$$

Тогда

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1} \cdot \varphi_{n+1} + \dots + c_{n+p} \cdot \varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2.$$

Отсюда, исходя из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ заключаем, что последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной, т.е. в силу полноты пространства E она сходится к некоторому элементу $f \in E$. Далее найдем коэффициенты Фурье для f . Имеем:

$$(f, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) + (f - f_n, \varphi_k).$$

При этом справа первое слагаемое при $k \leq n$ равно c_k , а второе стремится к нулю, т.к.

$$|(f - f_n, \varphi_k)| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_k\| \leq \|f - f_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Левая часть от n не зависит, поэтому получаем

$$(f, \varphi_k) = c_k.$$

Так как по построению $\|f - f_n\| \rightarrow 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f).$$

Действительно,

$$(f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \rightarrow 0.$$

Единственность такого f вытекает из того, что если $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2$, то $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ сходятся к f в норме E , а предел всегда единственен. ■

Докажем следующую полезную теорему:

Теорема 3 *Для того чтобы ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ в полном сепарабельном евклидовом пространстве была полна, необходимо и достаточно, чтобы в E не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{\varphi_n\}$.*

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}$ полна и, следовательно, замкнута. Если f ортогонален всем элементам $\{\varphi_n\}$, то все его коэффициенты Фурье равны нулю. Тогда из равенства Парсеваля получаем:

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

т. е. $f = 0$.

Обратно, пусть система $\{\varphi_n\}$ не полна. Тогда эта система не замкнута, и в E существует такой элемент $g \neq 0$, что

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \text{ где } c_k = (g, \varphi_k).$$

На основании теоремы Рисса-Фишера существует такой элемент $f \in E$, что

$$(f, \varphi_k) = c_k, \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

Но тогда $(f - g, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (g, \varphi_k) = c_k - c_k = 0$, т.е. элемент $f - g$ ортогонален φ_k для любого $k \in \mathbb{N}$, а из неравенства

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) < (g, g)$$

следует, что $f \neq g$, т. е. $f - g \neq 0$ и этот вектор ортогонален всем элементам системы $\{\varphi_n\}$. ■

Лекция 4 (4 февраля 2020)

Продолжим рассмотрение полных евклидовых пространств. Нас будут интересовать бесконечномерные пространства. Будем, как правило, предполагать наличие счетного всюду плотного множества.

§1. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме

Определение 1 *Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется гильбертовым пространством.*

Еще раз сформулируем аксиомы гильбертова пространства H с элементами f, g, \dots

I. H есть линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением (евклидово пространство).

II. Пространство H полно в смысле метрики

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

III. Пространство H бесконечномерно, т.е. в нём $\forall n \in \mathbb{N}$ можно найти n линейно независимых векторов.

Чаще всего рассматриваются сепарабельные гильбертовы пространства, которые удовлетворяют еще одной аксиоме.

IV. H сепарабельно, т.е. в нём существует счётное всюду плотное множество.

Примером сепарабельного гильбертова пространства является пространство l_2 . Будем рассматривать только сепарабельные гильбертовы пространства.

Два евклидовых пространства, E и E^* , называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначные соответствия так, что если

$$x \leftrightarrow x^*, y \leftrightarrow y^*, x, y \in E, x^*, y^* \in E^*$$

то

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \text{ и } (x, y) = (x^*, y^*),$$

т.е. изоморфизм сохраняет как линейные операции, определенные в этих пространствах, так и скалярное произведение.

Как известно, любые два n -мерных евклидовых пространства изоморфны между собой и каждое такое пространство изоморфно \mathbb{R}^n .

Евклидовы пространства бесконечной размерности не обязательно изоморфны. Например, пространства l_2 и $C_2[a, b]$ не изоморфны, т.к. первое – полно, а второе нет. Однако, для сепарабельных евклидовых пространств это единственное препятствие. Имеет место следующий факт.

Теорема 1 *Любые два сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Доказательство. Покажем, что каждое сепарабельное гильбертово пространство изоморфно l_2 . Тем самым будет доказана теорема. Выберем в H произвольную полную ортогональную нормированную систему $\{\varphi_n\}$ и поставим в соответствие элементу $f \in H$ совокупность его коэффициентов Фурье $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ по системе $\{\varphi_n\}$. Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, то $\{c_k\}$ принадлежит l_2 . Обратно, по теореме Рисса-Фишера всякому элементу (c_1, c_2, \dots) из l_2 отвечает некоторый элемент $f \in H$, имеющий числа $\{c_k\}$ своими коэффициентами Фурье. Установленное соответствие, очевидно, взаимно однозначно. Теперь, если

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots), \quad g \leftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots),$$

то

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n, \dots), \quad \lambda f \leftrightarrow (\lambda c_1, \dots, \lambda c_n, \dots),$$

т.е. сумма переходит в сумму и т.д., что означает линейность отображения.

Покажем, что из равенства Парсеваля следует, что

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot d_k.$$

В самом деле:

$$\begin{aligned} (f, f) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, & (g, g) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2, \\ (f + g, f + g) &= (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot d_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2. \end{aligned}$$

■

Доказанная теорема означает, что с точностью до изоморфизма существует лишь одно сепарабельное гильбертово пространство, а пространство l_2 можно рассматривать как его “координатную реализацию” (подобно пространству \mathbb{R}^n для конечномерных евклидовых пространств).

Другую реализацию можно получить, взяв евклидово пространство $C_2[a, b]$ и рассмотрев его пополнение. Пополнение можно сделать для любого метрического пространства. На полученном пространстве можно определить линейные операции и скалярное произведение по непрерывности, полагая

$$x + y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n), \quad \lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n$$

и

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n), \quad \text{где } x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \text{ в } C_2[a, b].$$

Существование этих пределов и независимость их от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ легко устанавливаются. Тогда полученное пространство будет полным евклидовым пространством, очевидно, бесконечномерным и сепарабельным. На самом деле, получится пространство $L_2[a, b]$, которое получалось в прошлом семестре.

§2. Подпространства, ортогональные дополнения. Прямая сумма

Определение 2 Линейным многообразием в гильбертовом пространстве H называется совокупность L элементов из H , что если $f, g \in L$, то $\alpha f + \beta g \in L$ для $\forall \alpha, \beta$. Замкнутое линейное многообразие называется подпространством.

Приведем примеры подпространств.

Пример 1 Пусть h произвольный элемент из H . Совокупность всех элементов, которые ортогональны h , образует подпространство в H .

Пример 2 Пусть H реализовано как ℓ_2 , то есть его элементы $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, где $\sum_k x_k^2 < \infty$. Элементы, подчиненные условию $x_1 = 0$ образуют подпространство ℓ_2 .

Пример 3 Опять $H = \ell_2$. Пусть $L = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)\}$, для которых $x_n = 0$ при $n = 2, 4, 6, \dots$ и x_n произвольно при $n = 1, 3, 5, \dots$. Это подпространство.

Приведите пример незамкнутого линейного многообразия в ℓ_2 .

Всякое подпространство гильбертова пространства либо является конечномерным евклидовым пространством, либо само представляет собой гильбертово пространство. Действительно, справедливость аксиом **I** – **III** для каждого такого подпространства очевидна, а аксиома **IV** вытекает из следующей леммы.

Лемма 1 Любое подмножество R' сепарабельного метрического пространства R само сепарабельно.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – счётное всюду плотное множество в R и $a_n = \inf_{\eta \in R} \rho(\xi_n, \eta)$. Для любых натуральных n и m найдется точка $\eta_{n,m} \in R'$, что

$$\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$. Для любого $\eta \in R'$ найдётся такое n , что $\rho(\xi_n, \eta) < \frac{\varepsilon}{3}$ и, следовательно, $\rho(\eta_{n,m}, \eta) < a_n + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$. Но тогда $\rho(\eta, \eta_{n,m}) < \varepsilon$, т.е. не более чем счётное множество $\{\eta_{n,m}\}$ ($n, m = 1, 2, 3, \dots$) всюду плотно в R' . ■

Применив процесс ортогонализации к какой-либо счётной всюду плотной последовательности элементов произвольного подпространства гильбертова пространства, получаем следующую теорему.

Теорема 2 В каждом подпространстве M пространства H содержится ортонормированная система $\{\varphi_n\}$, линейные замыкания которой совпадают с M .

Пусть M – подпространство H . Обозначим через

$$M^\perp = H \ominus M$$

множество элементов $g \in H$, ортогональных ко всем элементам $f \in M$ и докажем, что M^\perp есть подпространство пространства H . Линейность M^\perp очевидна, т.к. из $(g_1, f) =$

$(g_2, f) = 0$ вытекает $(\alpha g_1 + \beta g_2, f) = 0$. Для доказательства замкнутости допустим, что $g_n \in M^\perp$ и последовательность $\{g_n\}$ сходится к g . Тогда для любого $f \in M$

$$(g, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n, f) = 0, \text{ т.е. } g \in M^\perp.$$

Подпространство M^\perp называется ортогональным дополнением подпространства M .

Заметим, что $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Теорема 3 Если M (замкнутое) подпространство пространства H , то любой элемент $f \in H$ единственным образом представим в виде $f = h + h^\perp$, где $h \in M, h^\perp \in M^\perp$.

Доказательство. Докажем существование такого разложения. Для этого найдем в M полную ортогональную систему $\{\varphi_n\}$ и положим

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n, \text{ где } c_n = (f, \varphi_n).$$

Так как ряд $\sum c_n^2$ сходится (по неравенству Бесселя), то элемент h существует и принадлежит M .

Положим $h' = f - h$.

Очевидно, что для всех n выполнено $(h', \varphi_n) = c_n - c_n = 0$ и, поскольку произвольный элемент $\xi \in M$ представим в виде $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$, имеем

$$(h', \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \varphi_n) = 0. \text{ т.е. } h' \in M^\perp.$$

Допустим, что кроме построенного разложения $f = h + h'$ существует другое разложение $f = h_1 + h_1', h_1 \in M, h_1' \in M^\perp$. Тогда

$$h + h' = h_1 + h_1' \Rightarrow h - h_1 = h_1' - h' = 0, \text{ т.к. } M \cap M^\perp = \{0\}.$$

■

Сформулируем ряд полезных следствий из доказанной теоремы.

Следствие 1 Ортогональное дополнение к ортогональному дополнению M совпадает с самим M . т.е., $(M^\perp)^\perp = M$.

Значит, можно говорить о взаимно дополнительных подпространствах пространства H . Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\varphi'_n\}$ – полные ортогональные системы в M и M^\perp , соответственно, то объединяя эти системы, получаем полную ортогональную систему в H . В частности, справедливо

Следствие 2 Каждая ортогональная нормированная система может быть расширена до системы, полной в H .

Если система $\{\varphi_n\}$ конечна, то число её элементов равна размерности подпространства M , порожденного $\{\varphi_n\}$ и равна коразмерности подпространства M^\perp . Еще одно

Следствие 3 *Ортогональное дополнение к подпространству конечной размерности n имеет конечную коразмерность n , и наоборот.*

Если каждый вектор $f \in H$ представим в виде $f = h + h^\perp$, где $h \in M, h^\perp \in M^\perp$, то говорят, что пространство H есть прямая сумма взаимно ортогональных подпространств M и M^\perp и пишут

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Ясно, что понятие прямой суммы обобщается на любое конечное или счётное число подпространств, именно, говорят, что пространство H есть прямая сумма подпространств $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n \oplus \dots$$

если

1) подпространства M_i попарно ортогональны, т.е. любой вектор из M_i ортогонален любому вектору из M_j при $i \neq j$.

2) Каждый элемент $f \in H$ может быть представлен в виде

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots, \text{ где } h_n \in M_n,$$

причем, если число подпространств M_n бесконечно, то ряд $\sum \|h_n\|^2$ сходится. Легко проверить, что такое представление единственно и

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2.$$

Наряду с прямой суммой подпространств можно говорить о прямой сумме конечного или счётного числа произвольных гильбертовых пространств. Именно, если H_1 и H_2 два гильбертовых пространства, то их прямая сумма – это произвольные пары $(h_1, h_2), h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$, а скалярное произведение в $H_1 \oplus H_2$ равно

$$((h_1, h_2), (h'_1, h'_2)) = (h_1, h'_1) + (h_2, h'_2).$$

В пространстве $H = H_1 \oplus H_2$ содержатся, очевидно, взаимно ортогональные подпространства, состоящие из пар вида $(h_1, 0)$ и $(0, h_2)$ соответственно. Первые из них, очевидно, отождествляется с H_1 , а второе с H_2 .

Аналогично определяется сумма $H = \sum \oplus H_n$ конечного или счётного набора гильбертовых пространств.

Лекция 5 (11 февраля 2020)

§1. Комплексные евклидовы пространства

Наряду с действительным можно ввести и комплексное евклидово пространство (т.е. комплексное линейное пространство со скалярным произведением в нем). Однако сформулированные аксиомы не могут быть одновременно выполненными. Действительно,

$$\text{если } (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x), \text{ то при } \lambda = i, \quad (ix, ix) = (-1)(x, x),$$

т.е. квадраты векторов x и ix не могут быть одновременно положительными. Поэтому необходимо подправить аксиомы для скалярного произведения следующим образом:

- 1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- 2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
- 4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Тогда из 1) и 2) $\Rightarrow (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x)$.

Пример 1 Пространство \mathbb{C}^n , в котором скалярное произведение любых двух элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (x_1, y_2, \dots, y_n)$ определено формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}.$$

Как известно, всякое комплексное евклидово пространство размерности n изоморфно пространству \mathbb{C}^n .

Примеры бесконечномерных комплексных евклидовых пространств.

Пример 2 Комплексное пространство ℓ_2 , состоящее из элементов $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ где $x_n \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$, а скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Пример 3 Пространство $C_2[a, b]$ комплекснозначных непрерывных функций на $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Для комплексного скалярного произведения выполнено неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

В комплексном евклидовом пространстве длина (норма) вектора определяется, как и в действительном случае, по формуле:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Понятие угла между векторами в комплексном пространстве не вводят, т.к. $\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$ – комплексное число, однако, понятие ортогональности сохраняется: векторы x, y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

Если $\{\phi_n\}$ – ортонормированная система в комплексном евклидовом пространстве E , $f \in E$, то как и в действительном случае, числа $a_n = (f, \phi_n)$ называются коэффициентами Фурье, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \phi_n$ – рядом Фурье f по ортонормированной системе $\{\phi_n\}$.

Имеется неравенство Бесселя: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \|f\|^2$.

Аналогично вещественному евклидову пространству вводится понятие полной ортонормированной системы, ортогонального базиса и замкнутой ортонормированной системы. В частности, равенство Парсеваля для нормы имеет вид:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad c_k = (f, \phi_k),$$

а для комплексного скалярного произведения справедливо тождество

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{d}_n, \quad d_k = (g, \phi_k).$$

Справедлив также комплексный вариант теоремы Рисса-Фишера и следствия из нее.

Полное комплексное евклидово пространство бесконечной размерности называется комплексным гильбертовым пространством.

На комплексный случай переносится теорема об изоморфизме:

Теорема 1 *Все сепарабельные комплексные гильбертовы пространства изоморфны между собой, и все они изоморфны комплексному пространству ℓ_2 .*

Предлагается убедиться в том, что все доказанные нами теоремы для вещественных евклидовых пространств справедливы (с незначительными изменениями) и для комплексных евклидовых пространств.

§2. Пространство L_2

Пусть X – некоторое пространство с мерой μ (т.е. задана тройка (X, Σ, μ) , где Σ – это сигма-алгебра подмножеств X , а μ – сигма-аддитивная мера на Σ). Мера пространства X может быть конечной или сигма-конечной. Будем считать меру μ полной (т.е. любое подмножество множества меры нуль является измеримым).

Построим новое евклидово пространство, взяв совокупность функций с интегрируемым квадратом. Будем сперва рассматривать действительные функции f , заданные на множестве X . Все функции предполагаются измеримыми и определенными на X почти всюду. Эквивалентные между собой функции не различаются.

Определение 1 *Функция f называется функцией с интегрируемым квадратом на X , если интеграл $\int_X f^2(x) d\mu$ существует (конечен).*

Совокупность всех таких функций мы будем обозначать $L_2(X, \mu)$ или короче L_2 .

Установим основные свойства функций с интегрируемым квадратом.

1. Произведение двух функций с интегрируемым квадратом есть интегрируемая функция. Это вытекает из неравенства $|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$ и свойств интеграла Лебега.

Следствие 1 *Всякая функция с интегрируемым квадратом в пространстве конечной меры, является интегрируемой.*

Достаточно рассмотреть функцию $g(x) \equiv 1$ и воспользоваться свойством 1.

2. Сумма двух функций из L_2 также принадлежит L_2 . Действительно:

$$(f(x) + g(x))^2 \leq f^2(x) + 2|f(x) \cdot g(x)| + g^2(x).$$

Каждая из трех функций справа – интегрируема по свойству 1.

3. Если $f \in L_2, \alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha \cdot f \in L_2$. Очевидно, из свойств 2, 3 заключаем, что L_2 это линейное пространство.

Определим в L_2 скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_X f(x)g(x)d\mu. \quad (1)$$

Ясно, что все аксиомы скалярного произведения выполнены, а именно:

- 1) $(f, g) = (g, f)$,
- 2) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$,
- 3) $(\alpha f, g) = \alpha(f, g), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
- 4) $(f, f) > 0$ если $f \neq 0$.

Мы, как обычно, не различаем эквивалентные функции, т.е., разность которых почти всюду равна нулю. За нулевой элемент в пространстве L_2 принимается класс всех функций, которые почти всюду равны нулю.

Определение 2 *Евклидовым пространством L_2 называется линейное пространство, состоящее из классов эквивалентности между собой функций с интегрируемым квадратом, в котором скалярное произведение задается формулой формулой (1).*

В L_2 , как и в любом евклидовом пространстве выполнено неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\int_X f(x)g(x)d\mu \right)^2 \leq \left(\int_X f^2(x)d\mu \right) \cdot \left(\int_X g^2(x)d\mu \right)$$

и неравенство треугольника:

$$\left(\int_X (f(x) + g(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_X f^2(x)d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_X g^2(x)d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В частности, при $\mu(X) < \infty, g(x) \equiv 1$

$$\left(\int_X f(x)d\mu \right)^2 \leq \mu(X) \cdot \int_X f^2(x)d\mu. \quad (2)$$

Норма в L_2 задается формулой:

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X f^2(x) d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

а расстояние между элементами f и g равно

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_X (f(x) - g(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Величину $\int (f(x) - g(x))^2 d\mu = \|f - g\|^2$ называют среднеквадратичным отклонением функций f и g друг от друга.

Сходимость в смысле метрики пространства L_2 называется сходимостью в среднем квадратичном.

Теорема 2 Пространство $L_2(X, \mu)$ при $\mu(X) < \infty$ полное.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальна последовательность в L_2 , т.е.

$$\|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty.$$

Тогда в силу неравенства (2)

$$\int_X [f_n(x) - f_m(x)] d\mu \leq [\mu(X)]^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_X (f_n(x) - f_m(x))^2 d\mu \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \cdot \mu(X)^{\frac{1}{2}},$$

т.е., последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна и в метрике пространства $L_1(X, \mu)$ суммируемых функций. Но это пространство полное, поэтому $\{f_n\}$ сходится к некоторой суммируемой функции f в метрике пространства $L_1(X, \mu)$. Выберем из $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходящуюся почти всюду к функции f . В неравенстве

$$\int_X (f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x))^2 d\mu < \varepsilon,$$

справедливом для членов этой подпоследовательности, можно, используя теорему Фату, перейти к пределу при $l \rightarrow \infty$:

$$\int_X (f_{n_k}(x) - f(x))^2 d\mu \leq \varepsilon$$

откуда следует, что $f \in L_2$ и f_{n_k} сходится к f по норме пространства $L_2(X, \mu)$, а если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится. ■

Случай бесконечной меры: мы существенно использовали факт, что $\mu(X) < \infty$.

Если $\mu(X) = \infty$, то $f \in L_2 \not\Rightarrow f \in L_1$.

Пример: функция $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ интегрируема с квадратом на $X = \mathbb{R}$, но не интегрируема.

Кроме того, из сходимости в L_2 не следует сходимость в L_1 .

Пример: $\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } |x| \leq n \\ 0 & \text{при } |x| > n \end{cases}$.

Тогда $\phi_n(x)$ сходятся к 0 в $L_2(\mathbb{R})$, но не имеют предела в $L_1(\mathbb{R})$.

Однако теорема о полноте верна и в случае бесконечной меры.

Итак, $L_2(X, \mu)$ является полным евклидовым пространством, которое бесконечномерно (за исключением вырожденных случаев). Значит, это гильбертово пространство.

Определение 3 Мера μ называется мерой с конечным базисом, если существует счетная система $\mathcal{A} = \{A_n\}$ измеримых подмножеств X (счетный базис), что для любого $\varepsilon > 0$ и для всякого измеримого множества $M \subset X$ найдется такое $A_n \in \mathcal{A}$, что $\mu(M \Delta A_n) < \varepsilon$.

Мера Лебега, очевидно, имеет счетный базис. Прямое произведение $\mu_1 \otimes \mu_2$ двух мер со счетным базисом также обладает счетным базисом. Надо рассмотреть всевозможные попарный произведения элементов из обоих базисов. Следовательно, мера Лебега в \mathbb{R}^n имеет счетный базис.

Следующие теоремы сформулируем без доказательств (см. учебник Колмогоров, Фомин).

Теорема 3 Если мера μ имеет счетный базис, то в пространстве $L_1(X, \mu)$ существует счетное всюду плотное множество.

Теорема 4 Если мера μ имеет счётный базис, то $L_2(X, \mu)$ есть сепарабельное гильбертово пространство. В частности, $L_2(X, \mu)$ изоморфно ℓ_2 .

§3. Комплексное пространство L_2

Мы рассмотрели действительное пространство L_2 . Изложенные результаты легко переносятся на комплексный случай. Комплексная функция $f(x)$ определенная на некотором множестве X с заданной на нём мерой μ , называется функцией с интегрируемым квадратом, если интеграл $\int_X |f(x)|^2 d\mu$ конечен (по Лебегу).

Определив сложение таких функций и умножение их на числа обычным образом, а также введя скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu$$

мы получим комплексное евклидово пространство, называемое комплексным L_2 (при этом, как и в действительном случае, рассматриваем классы эквивалентности функций).

Лекция 6 (18 февраля 2020)

Различные виды сходимости и связь между ними

Сходимость в пространстве L_2 мы определили, введя норму: $f_n \rightarrow f$ если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f_n(x) - f(x))^2 d\mu = 0.$$

Такая сходимость называется сходимостью в среднем квадратичном. Посмотрим, как эта сходимость связана с другими типами сходимости функциональных последовательностей. Предположим сначала, что мера пространства X конечна: $\mu(X) < \infty$.

1. Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_2(X, \mu)$ сходится в метрике $L_2(X, \mu)$, то она сходится и в метрике $L_1(X, \mu)$.

Действительно, на прошлой лекции мы доказали неравенство

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \left[\mu(X) \int_X |f_n(x) - f(x)|^2 d\mu \right]^{\frac{1}{2}}$$

из которого и следует это утверждение.

2. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно, то она сходится и в среднем квадратичном (здесь $\mu(X) < \infty$).

Действительно, при каждом $\varepsilon > 0$ и при всех $n \geq N(\varepsilon)$ имеем $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in X$. Следовательно,

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^2 d\mu \leq \varepsilon^2 \mu(X),$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Напомним определение сходимости по мере:

Определение 1 Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере μ к функции $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

В этом определении предполагается, что $f_n(x)$ и $f(x)$ – измеримые функции.

3. Если последовательность суммируемых функций сходится в среднем, то она сходится на X и по мере (эта утверждение справедливо и при $\mu(X) = \infty$)

Для доказательства воспользуемся неравенством Чебышева. Пусть $A \in \Sigma$, φ – суммируемая на A функция. Тогда

$$\mu(\{x : x \in A, |\varphi(x)| \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \cdot \int_A |\varphi(x)| d\mu.$$

Действительно, пусть $A' = \{x : x \in A, |\varphi(x)| \geq c\} \subset A$. Тогда

$$\int_A |\varphi(x)| d\mu = \int_{A'} |\varphi(x)| d\mu + \int_{A \setminus A'} |\varphi(x)| d\mu \geq \int_{A'} |\varphi(x)| d\mu \geq c \cdot \mu(A').$$

Применим неравенство Чебышева для доказательства нашего утверждения. Положим $\varphi(x) = f_n(x) - f(x)$, $c = \varepsilon$ и получим:

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Установим связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.

4. Если последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится почти всюду к f , то она сходится к этой функции и по мере (здесь обязательно $\mu(X) < \infty$).

Доказательство. Как известно, предел почти всюду измеримых функций является измеримой функцией, т. е. функция $f(x)$ измерима. Пусть A – это то множество (нулевой меры), на котором $f_n(x)$ не стремится к $f(x)$.

Обозначим множества:

$$E_k(\varepsilon) = \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$R_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon),$$

$$M(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon).$$

Ясно, что все эти множества измеримы. Так как $R_1(\varepsilon) \supset R_2(\varepsilon) \supset \dots$, то в силу свойства непрерывности меры (при $\mu(X) < \infty$)

$$\mu(R_n(\varepsilon)) \rightarrow \mu(M(\varepsilon)) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Проверим теперь, что $M \subset A$. Действительно, если $x_0 \notin A$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое n_1 , что

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall k \geq n_1,$$

т. е. $x_0 \notin R_{n_1}(\varepsilon)$ и, тем более, $x \notin M(\varepsilon)$.

Но $\mu(A) = 0$, значит и $\mu(M(\varepsilon)) = 0$. Воспользовавшись соотношением (1) заключаем, что $\mu(R_n(\varepsilon)) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Осталось заметить, что $E_n(\varepsilon) \subset R_n(\varepsilon)$, значит и $\mu(E_n(\varepsilon)) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), что и требовалось доказать ■

Нетрудно убедиться, что из сходимости по мере не следует, вообще говоря, сходимости почти всюду. Действительно, для каждого натурального k определим функции $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_k^{(k)}$ на полуинтервале $(0, 1]$:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k}, \\ 0, & \text{при всех остальных } x. \end{cases}$$

Занумеровав эти функции подряд: $f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_1^{(3)}, \dots$, мы получим последовательность, которая сходится по мере к нулю, но не сходится ни в одной точке $(0, 1]$.

Несмотря на этот пример, имеется теорема:

Теорема 1 Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x)$. Тогда можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, которая сходится к $f(x)$ почти всюду (эта теорема выполнена и при $\mu(X) = \infty$).

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ – некоторая последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Пусть положительные числа $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ таковы, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ сходится.

Построим последовательность индексов $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ следующим образом: выберем n_1 так, чтобы выполнялось

$$\mu(\{x : |f_{n_1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_1\}) < \eta_1$$

(такое η_1 обязательно найдется в силу сходимости по мере); далее выберем $n_2 > n_1$ так, чтобы выполнялось

$$\mu(\{x : |f_{n_2}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_2\}) < \eta_2$$

и так далее. На очередном шаге выберем $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы выполнялось

$$\mu(\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}) < \eta_k.$$

Покажем, что построенная последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к f почти всюду. Действительно, пусть

$$R_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\},$$

$$Q = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m.$$

Заметим, что $\mu(Q) < \infty$. Поскольку $R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$, то в силу непрерывности меры, $\mu(R_m) \rightarrow \mu(Q)$. С другой стороны, ясно, что

$$\mu(R_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \eta_k \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Следовательно, $\mu(R_m) \rightarrow 0$ и $\mu(Q) = 0$.

Остается проверить, что во всех точках множества $X \setminus Q$ имеет место сходимость $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$.

Пусть $x_0 \in X \setminus Q$. Тогда найдется такое m_0 , что $x_0 \notin R_{m_0}$. Это означает, что для всех $k \geq m_0$ точка $x_0 \notin \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$, т. е. $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$.

Последовательность $\{\varepsilon_k\}$ выбиралась стремящейся к нулю, поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$ ■

Как легко видеть, из сходимости последовательности в среднем (и даже в среднем квадратичном) не вытекает, вообще говоря, ее сходимости почти всюду. Это видно из приведенного выше примера. Тем не менее, из Теоремы 1 заключаем:

5. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем, то из нее можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся почти всюду (здесь допускается $\mu(X) = \infty$).

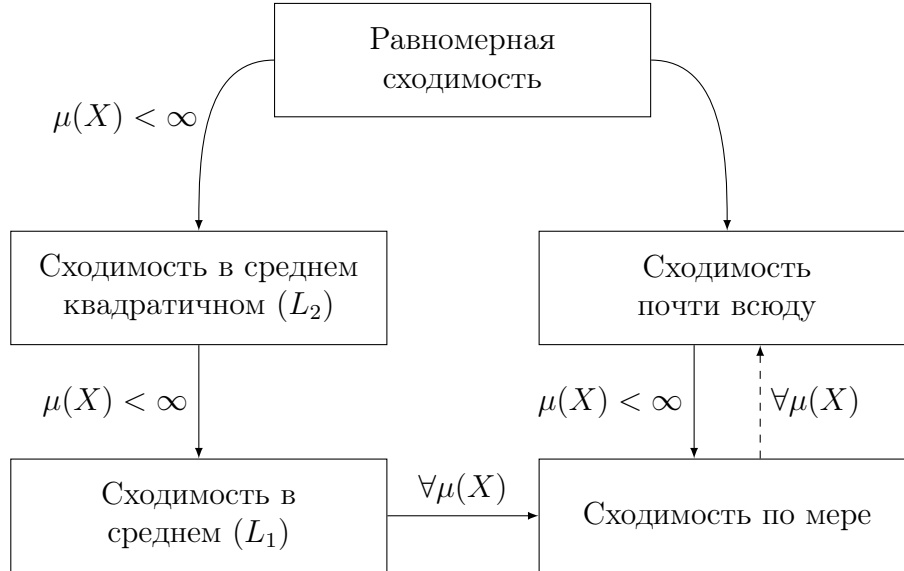
Обратное утверждение неверно. Последовательность может сходиться почти всюду (и даже всюду) и не сходиться при этом в среднем.

Пример 1

$$X = [0, 1], f_n = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, $f_n(x) \rightarrow 0$ при всех $x \in [0, 1]$. В то же время $\int_0^1 |f_n(x)| dx = 1$ при всех n (и никакая подпоследовательность не сходится).

Изобразим связи между различными видами сходимости при $\mu(X) < \infty$ в виде диаграммы:



Пунктирная стрелка означает возможность выбора подпоследовательности, сходящейся почти всюду.

В случае $\mu(X) = \infty$ (например, для функций на всей прямой с мерой Лебега) некоторые из этих связей тоже имеют место, а некоторые – нет. Это отмечено на диаграмме.

Пример 2

$$X = \mathbb{R}, f_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & |x| \leq n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Такая последовательность сходится равномерно на \mathbb{R} к функции $f(x) = 0$, однако она не сходится ни в среднем, ни в среднем квадратичном. Далее, из сходимости в среднем квадратичном (т. е. в L_2) не следует сходимости в среднем (т. е. в L_1).

Пример 3

$$X = \mathbb{R}, f_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & |x| \leq n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Такая последовательность сходится к $f(x) = 0$ в среднем квадратичном, но не в среднем.

Заметим, что для $\mu(X) = \infty$ из сходимости в среднем следует сходимости по мере (неравенство Чебышева справедливо всегда). Кроме того, для какой-то подпоследовательности будет и сходимости почти всюду (в доказательстве Теоремы 1 не нужна конечность меры).

Наконец, заметим, что из сходимости в среднем не следует сходимость в среднем квадратичном ни при $\mu(X) < \infty$, ни, тем более, при $\mu(X) = \infty$. Это подтверждает следующий

Пример 4

$$X = [0, 1], f_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & x \in (0, \frac{1}{n}], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лекция 7 (25 февраля 2020)

Общая теорема, доказанная нами для общих евклидовых пространств, говорит о том, что в L_2 существуют полные ортогональные системы функций (и полные ортонормированные системы). Такие системы можно получить, например, применяя процесс ортогонализации.

Если в L_2 выбрана некоторая ортогональная система $\{\varphi_n\}$, то по общим правилам каждый элемент $f \in L_2$ можно представить как сумму ряда $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ – ряда Фурье f по системе $\{\varphi_n\}$. Коэффициент Фурье c_n определяется по формуле:

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \cdot \int_X f(x) \varphi_n(x) d\mu, \quad \|\varphi_n\|^2 = \int_X \varphi_n^2(x) d\mu.$$

Выполнено равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 |c_n|^2 = \int_X |f(x)|^2 d\mu.$$

Рассмотрим теперь важнейшие примеры ортогональных систем в пространствах L_2 и отвечающие им разложения.

§1. Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье

Рассмотрим пространство $L_2[-\pi, \pi]$ с обычной мерой Лебега на нем. В этом пространстве функции

$$1, \cos nx, \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

образуют полную ортогональную систему, которая называется тригонометрической.

Ортогональность легко проверяется непосредственным вычислением. Например, при $n \neq m$ для косинусов получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)] dx = 0$$

и т.д. Полнота этой системы следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации любой непрерывной периодической функции тригонометрическими полиномами. Система не нормирована. Соответствующая нормированная система состоит из функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Действительно, напомним, что

$$\|1\|_{L_2}^2 = 2\pi, \quad \|\sin nx\|^2 = \|\cos nx\|^2 = \pi \quad (\text{следует из } \sin^2 nx + \cos^2 nx = 1).$$

Пусть f – функция из $L_2[-\pi, \pi]$, ее коэффициенты Фурье, отвечающие функциям $1, \cos nx, \sin nx$, принято обозначать $a_0/2, a_n, b_n$. Таким образом, по общим формулам

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \text{ т. е. } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Соответствующий ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \sin nx].$$

Для любой функции $f \in L_2$ этот ряд сходится именно к этой функции в среднем квадратичном, т. е., если обозначить

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k [a_n \cdot \cos nx + b_n \sin nx]$$

частичную сумму ряда Фурье, то среднеквадратичное отклонение S_k от f вычисляется по формуле

$$\|f(x) - S_k(x)\|^2 = \|f\|^2 - \pi \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k [a_n^2 + b_n^2] \right).$$

Среди всех тригонометрических полиномов

$$T_k(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^k [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx]$$

с заданным k именно частичная сумма S_k ряда Фурье дает наилучшее приближение функции f (в метрике L_2).

Неравенство Бесселя для тригонометрической системы:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

но поскольку тригонометрическая система полна, то, на самом деле, имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Значит, для любой функции $f \in L_2$ квадраты ее коэффициентов Фурье образуют сходящийся ряд.

Обратно, если числа a_0, a_n и b_n ($n = 1, 2, \dots$) таковы, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится, то по теореме Рисса-Фишера ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx]$$

также сходится (в L_2) и его сумма представляет собой функцию, имеющую a_0, a_n, b_n своими коэффициентами Фурье.

Значит $S_n(x)$ сходится к $f(x)$ в L_2 , а из результатов прошлой лекции получаем, что найдется подпоследовательность $S_{n_k}(x)$, такая что $S_{n_k}(x) \xrightarrow{п. б.} f(x)$ ($k \rightarrow \infty$).

Все приведенные рассуждения легко переносятся на функции, заданные на отрезке произвольной длины, скажем, на $[-l, l]$. Если $f(t) \in L_2[-l, l]$, то заменой $x = \frac{\pi}{l} \cdot t$, т. е. $t = \frac{l}{\pi} \cdot x$, переводим $f(t)$ в функцию $f^*(x) = f(\frac{lx}{\pi})$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{\pi n}{l} t\right) dt, n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} t\right) dt, n = 1, 2, \dots$$

Ряд Фурье для функции f , заданной на отрезке длины $2l$, имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} t\right) \right].$$

Выпишем также равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t)^2 dt.$$

Замечание 1 Тригонометрические ряды были использованы французским математиком Жаном Фурье в его работах по теории распространения тепла. Еще раньше формулы для коэффициентов a_n и b_n встречались у Эйлера. В дальнейшем теория тригонометрических рядов развивалась в работах Римана, Дирихле и других. Первоначально термины “ряд Фурье”, “коэффициенты Фурье” связывались именно с тригонометрической системой и лишь значительно позже в XX веке стали употребляться в общем смысле, т. е. применительно к произвольной ортогональной системе в любом евклидовом или гильбертовом пространстве.

Из полноты тригонометрической системы следует, что для любой $f \in L_2$ ее ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx]$$

сходится к f в среднем квадратичном. Однако с точки зрения математического анализа важно знать, когда эта сходимост имеет место в других смыслах, например, в каждой точке или равномерно на всем отрезке. Об этом речь пойдет в следующих лекциях.

§2. Тригонометрическая система на $[0, \pi]$

Функции

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots \quad (2)$$

$$\sin x, \sin 2x, \dots \quad (3)$$

образуют в совокупности полную ортогональную систему на отрезке $[-\pi, \pi]$. Покажем, что каждая из двух систем (2) и (3) ортогональна и полна в $L_2[0, \pi]$.

Ортогональность проверяется прямым подсчетом. Докажем полноту системы косинусов (2). Пусть $f \in L_2[0, \pi]$. Доопределим ее на полуинтервале $[\pi, 0)$ формулой $f(-x) = f(x)$ (четное продолжение) и разложим ее в ряд Фурье по всей тригонометрической системе $1, \cos nx, \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$). Поскольку функция f , определенная на $[-\pi, \pi]$, является четной, все ее коэффициенты по синусам равны нулю. Это сразу видно из формулы (интегрируем по $[-\pi, \pi]$ нечетную функцию). Иначе говоря, функцию f на $[-\pi, \pi]$ (и, тем более, на $[0, \pi]$) можно аппроксимировать в среднем квадратичном с любой точностью линейными комбинациями системы (2). Отсюда вытекает полнота этой системы.

Полнота системы (3) доказывается аналогично с помощью нечетного продолжения на $[-\pi, 0)$: $f(-x) = -f(x)$. Для нечетных функций коэффициенты Фурье по системе $1, \cos nx$ ($n = 1, 2, \dots$) равны нулю, что и требуется.

Выпишем формулу коэффициентов Фурье и равенство Парсеваля для $L_2[0, \pi]$, например, по $\sin nx$:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \left(\|\sin nx\|_{L_2[0, \pi]}^2 = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)^2 dx, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin nx.$$

§3. Ряд Фурье в комплексной форме

Тригонометрический ряд можно записать компактно, если воспользоваться формулами Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Подставляем в ряд Фурье, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \right] &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}, \end{aligned}$$

где $c_0 = \frac{a_0}{2}$ и при $n \geq 1$

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Выражение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

называется тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме. Коэффициенты c_n этого ряда выражаются через a_n и b_n по формулам (4). Однако легко написать и прямые формулы для c_n . Действительно, непосредственно вычислим при $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

а при $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Поэтому, умножая равенство

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx} \quad (5)$$

на e^{-imx} при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и интегрируя:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx &= 2\pi c_m, \text{ т. е.} \\ c_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-imx} dx \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

Разложение (5) остается в силе и для комплексных функций с интегрируемым квадратом на $[-\pi, \pi]$. Иначе говоря, функции $e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$ образуют базис в комплексном гильбертовом пространстве $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. При этом выражения (6) представляют собой скалярные произведения f на e^{imx} в этом комплексном пространстве.

Равенство Парсеваля для $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Если $\{c_n\}, \{d_n\}$ – коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$, то скалярное произведение в этом пространстве будет иметь вид:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot \overline{d_n}.$$

Заменяя функции e^{inx} на $e^{i\frac{\pi n}{T}x}$, можно перенести все сказанное на пространство $L_2[-l, l]$ комплексных функций на отрезке произвольной длины.

Заметим, что если f – вещественная функция, то для ее коэффициентов Фурье в комплексной форме имеют место соотношения

$$c_{-m} = \overline{c_m} \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

которое следует из (6) с помощью взятия операции комплексного сопряжения.

Лекция 8 (3 марта 2020)

§1. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Рассмотрим пространство $L_2[-\pi, \pi]$ функций с суммируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$. Как было показано, это бесконечномерное полное евклидово пространство, т.е. гильбертово пространство. Функции $1, \cos nx, \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$) образуют полную ортогональную систему, поэтому для каждой функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$ ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad \text{где} \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (2)$$

сходится к f в среднем квадратичном, т.е. в метрике $L_2[-\pi, \pi]$. Однако в связи с применением рядов Фурье к задачам математической физики важно знать условия, при которых ряд сходится не только в среднем, но и в точке, всюду и даже равномерно. Установим сначала условия сходимости тригонометрического ряда в данной точке.

Сделаем ряд замечаний.

Вместе с функцией на отрезке $[-\pi, \pi]$ можно говорить о периодических функциях с периодом 2π на всей прямой, поскольку каждую функцию, заданную на этом отрезке, можно периодически продолжить на всю ось.

Заметим, что функции из тригонометрической системы ограничены, поэтому, формулы (2), определяющие коэффициенты Фурье по этой системе, имеют смысл для любой суммируемой функции. Таким образом, каждой функции $f \in L_1[-\pi, \pi]$ отвечает совокупность её коэффициентов Фурье и её ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Перейдем теперь к вопросу о сходимости этого ряда в данной точке x к значению функции f в этой точке. Рассмотрим n -ую частичную сумму ряда Фурье

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (3)$$

Преобразуем $S_n(x)$, подставив в (3) вместо коэффициентов a_k и b_k их интегральные выражения, а переменную интегрирования обозначим t :

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt \right] dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt$$

Воспользуемся формулой:

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}u}{2 \sin \frac{u}{2}},$$

для проверки которой достаточно умножить правую и левую части на $2 \sin \frac{u}{2}$ и применить известное тригонометрическое тождество

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Действительно, сложим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sin \frac{u}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{u}{2}, \\ \sin \frac{3u}{2} - \sin \frac{u}{2} &= \cos u \cdot 2 \cdot \sin \frac{u}{2}, \\ &\dots \\ \sin \frac{2n+1}{2}u - \sin \frac{2n-1}{2}u &= \cos nu \cdot 2 \sin \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

и получим необходимое тождество.

Для частичных сумм $S_n(x)$ получаем формулу:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \quad (4)$$

Это представление $S_n(x)$ называется интегралом Дирихле.

Частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f \in L_1[-\pi, \pi]$ представили в виде интеграла Дирихле. Сделаем замену $t - x = z$. Поскольку под интегралом стоит периодическая функция с периодом 2π , интеграл от неё по любому отрезку длины 2π имеет одно и то же значение. Поэтому при интегрировании по z можно сохранить прежние пределы $-\pi$ и π . Получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz. \quad (5)$$

Функция

$$D_n(z) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}}$$

называется ядром Дирихле. Интеграл Дирихле имеет вид

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz.$$

Из представления

$$\frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}} = \frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \dots + \cos nz$$

следует, что $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz = 1$. Используем это равенство и запишем разность

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(x)] \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz, \quad (6)$$

или более компактно

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(x)] \cdot D_n(z) dz \quad (7)$$

где

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \cdot D_n(z) dz. \quad (8)$$

Мы свели вопрос о сходимости $S_n(x)$ к $f(x)$ к вопросу о стремлении к нулю интеграла (6) или (7). Дальнейшее исследование основано на следующей лемме.

Лемма 1 (Риман) Если функция φ суммируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = 0 \quad (\text{то же верно для } \cos px).$$

Доказательство. Если φ — непрерывно дифференцируемая функция, то интегрируя по частям имеем:

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = -\varphi(x) \cdot \frac{\cos px}{p} \Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos px}{p} \, dx \rightarrow 0$$

поскольку

$$\int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos px}{p} \, dx = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Пусть теперь φ — произвольная суммируемая функция $[a, b]$. Заметим, что непрерывно дифференцируемые функции плотны в пространстве $L_1[a, b]$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi_\varepsilon \in C^1[a, b]$, что

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{Далее имеем:}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx \right| &\leq \left| \int_a^b [\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)] \sin px \, dx \right| + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px \, dx \right| \leq \\ &\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \, dx + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px \, dx \right|. \end{aligned}$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$. ■

Замечание 1 Из леммы Римана вытекает, что для любого $\delta > 0$

$$\int_{\delta < |z| < \pi} f(x+z) \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Это означает, что сходимость ряда Фурье, т.е., стремление к нулю правой части (7), и сумма ряда Фурье в точке x , т.е. предел интеграла Дирихле (8) при $n \rightarrow \infty$, зависят лишь от значений функции f в любой сколь угодно малой окрестности точки x . Это утверждение называется принципом локализации ряда Фурье.

Сформулируем и докажем достаточный признак сходимости ряда Фурье.

Теорема 1 Пусть f – суммируемая функция. Предположим, что для точки $x \in [-\pi, \pi]$ выполнено условие: для некоторого $\delta > 0$ существует (конечен) интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right| dz \quad (9)$$

тогда частичные суммы $S_n(x)$ сходятся к $f(x)$ в этой точке x .

Доказательство. Перепишем интеграл (6) в следующем виде:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}} \cdot \sin \frac{2n+1}{2}z dz. \quad (10)$$

Если функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$ интегрируема по z в пределах $[-\delta, \delta]$, то она интегрируема и на $[-\pi, \pi]$ (поскольку $f \in L_1[-\pi, \pi]$). Но тогда интегрируема и функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}}$. Поэтому к интегралу (10) можно применить Лемму 1, из которой следует, что этот интеграл стремится к 0. ■

Замечание 2 Сходимость интеграла (9) называется условием Дини. Легко видеть, что условие Дини выполнено, если в данной точке x функция f непрерывна и имеет конечную производную (или хотя бы левую и правую производные).

Условие Дини можно ослабить, потребовав конечность следующих интегралов:

$$\int_{-\delta}^0 \left| \frac{f(x+z) - f(x-0)}{z} \right| dz \quad \text{и} \quad \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \right| dz, \quad (11)$$

где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – это левый и правый пределы функции f в точке x . Действительно, поскольку функция $\frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}}$ является четной, разность

$$S_n(x) - \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2} \quad \text{можно представить в виде:}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x+z) - f(x-0)] \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+z) - f(x+0)] \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}}$$

Тогда при условии существования интегралов (9) эти выражения, по лемме 1, стремятся к нулю.

§2. Условие “глобальной” сходимости ряда Фурье

Следствие 1 Пусть f – суммируемая (например, измеримая и ограниченная) функция с периодом 2π , которая в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ имеет левую и правую производные. (В этом случае, как легко видеть, в каждой точке x функция $f(x)$ или непрерывна или имеет разрыв лишь 1-го рода). Тогда её ряд Фурье сходится всюду, а его сумма равна $f(x)$ в точках непрерывности и равна $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ в точках разрыва.

В частности, если периодическая функция $f(x)$ дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье сходится к ней при всех $x \in [-\pi, \pi]$.

Условие Дини, обеспечивающее сходимость ряда Фурье, можно заменить другими условиями, но отбросить его совсем нельзя. Даже среди непрерывных функций существует функции с рядом Фурье, расходящимся в некоторых точках. Среди суммируемых функций, как показал А.Н. Колмогоров, существует такие, ряд Фурье которых расходуется всюду. Вместе с тем, для функций из L_2 , их ряд Фурье сходится почти всюду. Последнее утверждение носит название проблемы Лузина (1915 г.), которая была решена лишь в 1966 году шведским математиком Л. Карлесоном. Из этого в частности следует, что ряд Фурье непрерывной функции обязан сходиться почти во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$.

Лекция 9 (10 марта 2020)

§1. Условия равномерной сходимости ряда Фурье

Мы установили условия, достаточные для сходимости ряда Фурье функции f в каждой точке. Класс функций, удовлетворяющих этим условиям весьма широк. Непрерывности функции мало. Рассмотрим теперь вопрос о равномерной сходимости ряда Фурье. Ясно, что если у функции $f(x)$ есть хоть один разрыв, то её ряд Фурье не может сходиться равномерно, поскольку сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций всегда непрерывна. Значит, непрерывность функций – это необходимое условие. Сформулируем достаточное условие равномерной сходимости.

Теорема 1 Если функция f с периодом 2π является абсолютно непрерывной, и её производная $f'(x)$ принадлежит пространству $L_2(-\pi, \pi)$, то ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на всей прямой.

Доказательство. Обозначим a'_n и b'_n коэффициенты Фурье функции f' . Так как f является абсолютно непрерывной, то в интеграле

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \sin(nx)$$

можно применить формулу интегрирования по частям:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} f(x) \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx = -\frac{b'_n}{n}, \quad n \neq 0,$$

поскольку $f(x)$ периодическая функция. Аналогично получаем

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{a'_n}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n}. \quad (1)$$

Этот ряд сходится, поскольку

$$\frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(|b'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \frac{|a'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(|a'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \text{причем}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n'^2 + b_n'^2 < \infty.$$

Последний ряд сходится в силу неравенства Бесселя для функции f' , которая принадлежит пространству $L_2(-\pi, \pi)$ по условию теоремы.

Числовой ряд (1) служит, очевидно, мажорантой для ряда Фурье функции f . Но тогда, по признаку Вейерштрасса, ряд Фурье функции f равномерно (и абсолютно) сходится. Осталось показать, что его сумма есть f . Пусть φ – сумма ряда Фурье функции f . Тогда φ имеет те же коэффициенты Фурье, что и f . Отсюда, в силу непрерывности обеих функций, получаем, что $f \equiv \varphi$. ■

Следствие 1 *Если непрерывная периодическая функция $f(x)$ является кусочно непрерывно дифференцируемой, (т.е. производная $f'(x)$ существует для всех точек x кроме их конечного числа, причем на каждом интервале между этими точками производная непрерывна, а на концах этих интервалов существует и левая, и правая производная), то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на всей оси.*

Действительно, функция с указанными свойствами является абсолютно непрерывной, поэтому применима теорема 1.

§2. Теорема Фейера

Пусть f – непрерывная функция на прямой с периодом 2π . Эта функция определяется своим рядом Фурье однозначно. Действительно, если f_1 и f_2 – две непрерывные функции, имеющие одни и те же коэффициенты Фурье, то у непрерывной функции $f_1 - f_2$ все коэффициенты Фурье равны нулю, тогда по равенству Парсеваля эта функция равна нулю почти всюду, т.е. $f_1 \equiv f_2$ всюду. Однако, поскольку ряд Фурье непрерывной функции не обязан сходиться всюду, то мы не можем получить функцию f , суммируя её ряд Фурье, и тем более ряд Фурье не будет сходиться равномерно. Способ восстановления непрерывной функции в равномерной метрике по её коэффициентам Фурье придумал Фейер. Пусть

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx) \quad (2)$$

частичная сумма ряда Фурье функции f степени k . Положим

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n} \quad (3)$$

выражения σ_n – средние арифметические сумм S_k – называются суммами Фейера функции f .

Замечание 1 Пусть числовая последовательность $\{d_k\}$ сходится: $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$. Тогда последовательность $D_n = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}$ так же сходится к d . Обратное неверно: Например: $d_n = (-1)^n$ и в этом случае $D_n \rightarrow 0$, $d_n \not\rightarrow 0$.

Теорема 2 (Фейер) *Если f – непрерывная функция с периодом 2π , то последовательность $\{\sigma_n\}$ её сумм Фейера сходится к f равномерно на всей оси.*

Доказательство. Воспользуемся полученной нами формулой для частичной суммы ряда Фурье в виде интеграла Дирихле:

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz.$$

Подставив эти интегралы в равенство (3), получим для $\sigma_n(x)$ следующее выражение:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} \right\} f(x+z) dz.$$

Воспользуемся формулой

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)u = \frac{\sin^2 nu}{\sin u},$$

которую легко получить, применив тождество $2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta-\alpha}{2} = \cos \alpha - \cos \beta$ и суммируя по k равенствам

$$2 \sin(2k+1)u \cdot \sin u = \cos 2ku - \cos 2(k+1)u$$

т.е.

$$2 \sin u \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)u = \sum_{k=0}^{n-1} \cos 2ku - \cos 2(k+1)u = 1 - \cos 2nu = 2 \sin^2 nu.$$

Приходим к формуле для $\sigma_n(x)$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 f(x+z) dz, \quad (4)$$

которая называется интегралом Фейера. Функция

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin n \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2$$

называется ядром Фейера порядка n . Формулу (4) перепишем в виде:

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \cdot \Phi_n(z) dz. \quad (5)$$

Ядро Фейера имеет следующие свойства:

- 1) $\Phi_n(z) \geq 0$, причем эта функция четная;
- 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) dz = 1$;
- 3) $\forall \delta > 0 \quad \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z) dz = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z) dz = \eta_n(\delta) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Первое из этих свойств очевидно, второе получается из тождества (5) если рассмотреть $f(x) \equiv 1$ и учесть, что для такой функции сумма Фейера $\sigma_n(z) \equiv 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Третье свойство вытекает из четности ядра Фейера и из того, что при $\delta \leq z \leq \pi$ получаем: $\sin \frac{z}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2} \geq 0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{\sin \frac{nz}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2, \quad \text{и поэтому} \quad \eta_n(\delta) \leq \frac{1}{2\pi n} \frac{\pi - \delta}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Докажем теперь теорему Фейера. Так как периодическая функция f непрерывна, то она ограничена и равномерно непрерывна на всей оси, т.е. существует такая постоянная M , что для всех x

$$|f(x)| \leq M, \quad (6)$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{как только} \quad |x' - x''| < \delta. \quad (7)$$

Нам необходимо оценить интеграл

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+z)] \cdot \Phi_n(z) dz,$$

который можно представить в виде суммы трёх интегралов

$$\begin{aligned} J_- &= \int_{-\pi}^{-\delta} \{f(x) - f(x+z)\} \Phi_n(z) dz \\ J_0 &= \int_{-\delta}^{\delta} \{f(x) - f(x+z)\} \Phi_n(z) dz \\ J_+ &= \int_{\delta}^{\pi} \{f(x) - f(x+z)\} \Phi_n(z) dz. \end{aligned}$$

Из (6) и (7) непосредственно вытекают оценки

$$\begin{aligned} |J_-| &\leq 2M \cdot \eta_n(\delta), \quad |J_+| \leq 2M \cdot \eta_n(\delta), \\ |J_0| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z) dz \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) dz = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

где в последней строке мы воспользовались также свойствами 1) и 2) ядра Фейера.

Выберем теперь n_0 настолько большим, что при $n > n_0$ для данного δ выполнялось: $2M\eta_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Откуда следует утверждение теоремы. ■

Из теоремы Фейера следует важное

Следствие 2 (Первая теорема Вейерштрасса) Любую непрерывную 2π -периодическую функцию можно приблизить с помощью последовательности тригонометрических полиномов равномерно на всей оси.

Получим также важное свойство ряда Фурье непрерывной периодической функции.

Следствие 3 Ряд Фурье непрерывной функции f в каждой точке x либо расходится, либо сходится к ее значению $f(x)$.

Доказательство. Если последовательность $S_n(x)$ сходится для некоторого x , то сходится и $\sigma_n(x)$, причем к тому же пределу (см. Замечание 1). Однако, по теореме Фейера $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$. Следовательно, $S_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$). ■

§3. Теорема Фейера для пространства L_1

В теореме Фейера достигнута определенная симметрия между условием и утверждением теоремы. Из того, что функция f принадлежит пространству $C[-\pi, \pi]$ непрерывных функций следует, что отвечающие ей суммы Фейера сходятся к f в метрике того же самого пространства $C[-\pi, \pi]$.

Для пространства $L_2[-\pi, \pi]$ это тоже верно, поскольку частичные суммы ряда Фурье $S_n(x)$ функции $f(x)$, суммируемой в квадрате, сходятся в средне квадратичном к $f(x)$, поэтому и суммы Фейера $\sigma_n(x)$ сходятся к $f(x)$ в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ (это верно в любом евклидовом пространстве. Проверьте это!).

Аналогичный результат можно получить для других функциональных пространств, в частности для $L_1[-\pi, \pi]$. Точнее, имеет место следующая теорема, которую можно назвать теоремой Фейера для суммируемых функций.

Теорема 3 Если $f \in L_1[-\pi, \pi]$, то суммы Фейера функции f сходятся к ней по норме пространства $L_1[-\pi, \pi]$.

Доказательство этой теоремы можно получить с помощью рассуждений, близких к доказательству теоремы 2. При этом решающую роль опять играют хорошие свойства ядра Фейера. Отметим так же, что для сумм Фурье (т.е. для частичных сумм рядов Фурье) это неверно: существуют суммируемые функции, ряды Фурье которых не сходятся в $L_1[-\pi, \pi]$.

Приведем один важный факт, вытекающий из теоремы 3.

Следствие 4 Всякая суммируемая функция однозначно (с точностью до эквивалентности) определяется своими коэффициентами Фурье. Действительно, пусть f и g — две суммируемые функции, имеющие одинаковые коэффициенты Фурье. Тогда коэффициенты функции $f - g$ равны 0. Следовательно, тождественно равны 0 и все суммы Фейера для $f - g$. Но тогда их предел в L_1 , т.е. функция $f - g$, равна 0 почти всюду.

Лекция 10 (17 марта 2020)

§1. Полнота тригонометрической системы. Теоремы Вейерштрасса

Из теоремы Фейера следует полнота тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$. Действительно, в силу этой теоремы любая непрерывная функция, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, является пределом равномерно (а значит и в среднем) сходящейся последовательности тригонометрических многочленов. Остается заметить, что непрерывные функции с условием $f(-\pi) = f(\pi)$ всюду плотны в $L_2[-\pi, \pi]$.

Отметим, что теорема Фейера усиливает теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной периодической функции многочленами: эта теорема утверждает, что всякая такая непрерывная функция есть равномерный предел какой-то последовательности тригонометрических многочленов, а теорема Фейера указывает, как построить конкретную обладающую этим свойством последовательность – взять сумму Фейера.

Из теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной периодической функции тригонометрическими многочленами легко следует и вторая теорема Вейерштрасса.

Теорема 1 *Любая непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ равномерно аппроксимируется алгебраическими многочленами.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$. Положим $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, то есть $x = \frac{t(b-a)}{\pi} + a$, и получим функцию $\varphi(t)$ переменной t , заданную на $[0, \pi]$. Продолжим ее вначале симметрично на полуинтервал $[-\pi, 0)$, положив $\varphi(-t) = \varphi(t)$, а потом, по периодичности, на всю прямую. Получим непрерывную на всей прямой периодическую функцию. Построим теперь тригонометрический многочлен $T_n(t)$, удовлетворяющий неравенству

$$|T_n(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Далее, всякий тригонометрический многочлен разлагается в ряд Тейлора, сходящийся равномерно на любом конечном отрезке. Пусть P_m – такая частичная сумма ряда Тейлора для T_n , что

$$|T_n(t) - P_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } 0 \leq t \leq \pi.$$

Тогда

$$|\varphi(t) - P_m(t)| < \varepsilon \quad \text{при } 0 \leq t \leq \pi.$$

Сделаем в $P_m(t)$ обратную замену $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$ и получим многочлен $Q_m(x)$, такой что

$$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

■

Исследуем вопрос о связи гладкости функции со скоростью убывания ее коэффициентов Фурье.

§2. Оценка коэффициентов Фурье гладкой функции

Лемма 1 (о почленном дифференцировании ряда Фурье) Если абсолютно непрерывная функция $f \in C([-π, π], \mathbb{C})$ (например, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая), принимает на концах равные значения (т. е. $f(π) = f(-π)$), то ряд Фурье ее производной $f'(x)$ (которая существует почти всюду и является интегрируемой по Лебегу функцией) может быть получен формальным дифференцированием по x ряда Фурье самой функции $f(x)$, т. е. если ряды Фурье f и f' имеют вид

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx} \quad \text{и} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f') e^{ikx},$$

соответственно, то

$$c_k(f') = ik \cdot c_k(f) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Доказательство. Исходя из определения коэффициентов Фурье, интегрированием по частям находим:

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot ik \cdot e^{-ikx} dx = \\ &= 0 + ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = ik \cdot c_k(f), \end{aligned}$$

поскольку $f(\pi) e^{-ik\pi} - f(-\pi) e^{ik\pi} = \cos(k\pi) (f(\pi) - f(-\pi)) = 0$. Интегрирование по частям законно, так как функция $f'(x)$ является интегрируемой, а функция e^{-ikx} — непрерывно дифференцируема. ■

Утверждение 3 (о связи гладкости функции со скоростью сходимости ее коэффициентов Фурье)

Пусть $f \in C^{(m-1)}([-π, π], \mathbb{C})$ и $f^{(j)}(-π) = f^{(j)}(π)$ при $j = 0, 1, \dots, m-1$. Если функция f имеет на отрезке $[-π, π]$ интегрируемую в квадрате производную $f^{(m)}$ порядка m , то

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

и

$$|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{k^m} = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

причем $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^2 < \infty$.

Доказательство. Соотношение (2) получается в результате m -кратного применения тождества (1):

$$c_k(f^{(m)}) = (ik) \cdot c_k(f^{(m-1)}) = \dots = (ik)^m c_k(f).$$

Полагаем теперь $\gamma_k = |c_k(f^{(m)})|$ и применяем неравенство Бесселя к функции $f^{(m)}$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f^{(m)})|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(x)|^2 dx,$$

из которого и из (2) получаем (3) и $\gamma_k \rightarrow 0$ ■

Замечание 1 В доказательстве Утверждения 1, как и в Лемме 1, вместо условий $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ можно считать, что f – это заданная на всей прямой периодическая функция нужной гладкости.

Замечание 2 Если тригонометрический ряд Фурье записывать через функции $\sin kx$ и $\cos kx$, то вместо простых соотношений (2) пришлось бы писать заметно более сложные, смысл которых, однако, будет тот же: при указанных условиях ряд Фурье можно дифференцировать почленно. Что касается оценок коэффициентов $a_k(f), b_k(f)$, то поскольку

$$a_k(f) = c_k(f) - c_{-k}(f), \quad b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f)),$$

получаем неравенства:

$$|a_k(f)| \leq \frac{\alpha_k}{k^m}, \quad |b_k(f)| \leq \frac{\beta_k}{k^m}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

причем $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$ и $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^2 < \infty$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k^2 < \infty$.

§3. Гладкость функции и скорость сходимости ее ряда Фурье

Теорема 2 Пусть, как и в Утверждении 1, $f \in C^{(m-1)}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ и $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ при $j = 0, 1, \dots, m-1$ и f имеет на $[-\pi, \pi]$ интегрируемую в квадрате производную $f^{(m)}$ порядка m . Тогда ряд Фурье функции f сходится к самой f абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$, причем отклонение n -й частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье от $f(x)$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0+. \quad (5)$$

Доказательство. Если непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция удовлетворяет соотношению $f(-\pi) = f(\pi)$ и имеет на этом отрезке хотя бы первую производную, суммируемую в квадрате, то из оценок (4) следует, что

$$|a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx| \leq \frac{\alpha_k + \beta_k}{k} \leq \frac{1}{2} \left[(\alpha_k + \beta_k)^2 + \frac{1}{k^2} \right] \leq \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \frac{1}{2k^2}.$$

Поскольку ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ сходятся, то на основании мажоритарного признака Вейерштрасса заключаем, что ряд Фурье

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx]$$

функции f сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$, причем сумма этого ряда, очевидно, равна $f(x)$ при всех x в силу непрерывности этой функции

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx].$$

Теперь оценим отклонение $S_n(x)$ от $f(x)$, используя неравенства (4):

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} [a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx] \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k + \beta_k}{k^m}. \end{aligned}$$

По неравенству Коши-Буняковского:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k + \beta_k}{k^m} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right)^{1/2}.$$

Полагаем $x_n = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2 \right)^{1/2}$ и, учитывая сходимость ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$, заключаем $x_n \rightarrow 0$. Далее

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}} \Rightarrow \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot \frac{1}{n^{m-1/2}}.$$

Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot x_n$ и получим (5) ■

С помощью Теоремы 2 можно еще раз получить аппроксимационную теорему Вейерштрасса, независимо от теоремы Фейера. Действительно, используя равномерную непрерывность функции f на отрезке $[-\pi, \pi]$, аппроксимируем f на этом отрезке с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ кусочно линейной непрерывной функцией $\varphi(x)$, принимающей на концах те же значения, что и f : $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. По Теореме 2 ряд Фурье функции $\varphi(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$. Взяв частичную сумму этого ряда, отклоняющуюся от $\varphi(x)$ не более, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, получим тригонометрический многочлен, отклоняющийся от $f(x)$ не более чем на ε .

С помощью Теоремы 2 можно также доказать следующее утверждение, дополняющее Лемму 1.

Утверждение 4 Если функция $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ является интегрируемой с квадратом (например, кусочно непрерывной), то соотношение

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

после интегрирования превращается в равенство

$$\int_0^x f(t) dt = c_0(f)x + \sum_{-\infty}^{\infty} {}^* \frac{c_k(f)}{ik} (e^{ikx} - 1), \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$$

где звездочка означает, что в сумме отсутствует член, отвечающий $k = 0$, а сумма понимается как предел симметричных частных сумм $\sum_{k=-n, k \neq 0}^n$, причем ряд сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - c_0(f)x \text{ на } [-\pi, \pi] \quad (c_0(f) - \text{коэффициент Фурье}).$$

Очевидно, что $F \in C[-\pi, \pi]$ и $F(\pi) = F(-\pi)$, т. к.

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - 2\pi c_0(f) = 0.$$

Поскольку производная $F'(x) = f(x) - c_0(f)$, то $F(x)$ суммируема в квадрате, и по Теореме 2 ряд Фурье функции F равномерно сходится к F на $[-\pi, \pi]$. По Лемме 1

$$c_k(F) = \frac{c_k(F')}{ik} \text{ при } k \neq 0.$$

Однако $c_k(F') = c_k(f)$ при $k \neq 0$.

Записываем теперь равенство

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$$

в терминах функции f и учитываем, что

$$0 = F(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F).$$

Получаем

$$\int_0^x f(t)dt - c_0(f)x = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_k(f)}{ik} (e^{ikx} - 1).$$

■

Вывод: ряды Фурье суммируемых в квадрате (например, кусочно непрерывных) функций можно интегрировать формально, при этом получаются равномерно сходящиеся ряды Фурье для первообразных.

Математический анализ

Лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов *

Факультет математики ВШЭ, 2020 г. 2 семестр, 4 модуль

Лекция 11 (27 марта 2020)

Применение рядов Фурье

§1. Изопериметрическое неравенство

Рассмотрим классическую геометрическую задачу: среди всех замкнутых кривых на плоскости, имеющих длину L , найти кривую, ограничивающую наибольшую площадь.

Теорема 1 Пусть кривая на плоскости имеет длину L и ограничивает область площади S . Тогда выполнено соотношение

$$4\pi S \leq L^2. \quad (1)$$

Доказательство. Будем предполагать, что рассматриваемая кривая является гладкой, и она задана в параметрическом виде $x = \varphi(s), y = \psi(s)$, где s — натуральный параметр, т. е. длина дуги вдоль кривой, а функции $\varphi, \psi \in C^1[0, L]$.

Условие замкнутости кривой: $\varphi(0) = \varphi(L), \psi(0) = \psi(L)$.

Перейдем от параметра s к параметру $t = 2\pi \cdot \frac{s}{L} - \pi$, который меняется от $-\pi$ до π , и будем считать, что кривая задана в параметрическом виде

$$x = x(t), y = y(t), -\pi \leq t \leq \pi,$$

причем $x(-\pi) = x(\pi), y(-\pi) = y(\pi)$.

Уравнения кривой запишем в виде одной комплексной функции:

$$z = z(t), -\pi \leq t \leq \pi,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$, причем $z(-\pi) = z(\pi)$.

Заметим, что $|z'(t)|^2 = |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, и при такой параметризации

$$|z'(t)|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}. \quad (2)$$

*Компьютерный набор и верстка Антон Жевнерчук и Тимур Степанов.

Заметим, что

$$\bar{z}z' = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - x'y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)' + i(xy' - x'y).$$

Это соотношение позволяет записать выражение для площади, ограниченной кривой $(x(t), y(t))$, в комплексном виде:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (xy' - yx')(t) dt = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} z'(t) \bar{z}(t) dt. \quad (3)$$

Разложим функцию $z(t)$ в ряд Фурье:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad \text{где } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) e^{-ikt} dt.$$

Тогда ряд Фурье производной, которая принадлежит $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, имеет вид

$$z'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikt}.$$

Равенства (2) и (3) означают, в частности, что

$$\frac{1}{2\pi} \|z'\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2 dt = \frac{L^2}{4\pi^2} \quad (\text{норма в } L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})),$$

$$\frac{1}{2\pi} \langle z', z \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z'(t) \bar{z}(t) dt = \frac{i}{\pi} S \quad (\text{скалярное произведение в } L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})).$$

В терминах коэффициентов Фурье эти соотношения принимают вид:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |kc_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2 dt = \frac{L^2}{4\pi^2},$$

$$i \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k \bar{c}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z'(t) \bar{z}(t) dt = \frac{i}{\pi} S \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 = \frac{S}{\pi}.$$

Здесь мы воспользовались равенством Парсеваля для квадрата вектора и для скалярного произведения двух векторов в комплексном евклидовом пространстве.

Следовательно,

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k^2 - k) |c_k|^2.$$

Правая часть этого равенства неотрицательна и обращается в ноль только когда выполнены условия $c_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, 1$.

Итак, доказано неравенство (1), а заодно установлено уравнение кривой, для которой достигается равенство:

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it}, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Это параметрическое уравнение окружности с центром c_0 и радиусом $|c_1|$ ■

Теперь мы займемся применением рядов Фурье для решений некоторых уравнений математической физики, которые являются дифференциальными уравнениями с частными производными.

§2. Решение первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности

Обозначим $Q = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ – прямоугольник в \mathbb{R}^2 с открытой нижней границей.

Задача Найти функцию $u(x, t)$, $(x, t) \in Q$, $u \in C(\bar{Q})$, $\exists \frac{\partial u}{\partial t} \in C(Q)$, $\exists \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(Q)$, которая удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall (x, t) \in Q; \quad (1)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l] \quad (\varphi \in C[0, l]); \quad (2)$$

и граничному условию

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Приведенная задача является математической моделью физического явления распространения тепла в тонком однородном стержне, концы которого ($x = 0$, $x = l$) поддерживаются при нулевой температуре. Здесь $u(x, t)$ обозначает температуру в точке стержня $x \in [0, l]$ в момент времени $t \in [0, T]$. При этом известно начальное распределение температуры в стержне в момент времени $t = 0$ (функция $\varphi(x)$, $x \in [0, l]$). Число a обозначает коэффициент теплопроводности материала стержня.

Рассмотрим метод разделения переменных или метод Фурье решения этой задачи.

Мы не будем сразу указывать условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$, а сделаем это позже.

Шаг 1. Разделяются переменные, т. е. мы ищем частные решения уравнения (1) (не равные тождественно нулю) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной независимой переменной:

$$u(x, t) = Y(x) \cdot Z(t). \quad (4)$$

Продифференцируем, подставим в уравнение (1) и получим равенство:

$$Z'(t)Y(x) = a^2 Y''(x)Z(t).$$

Делим на a^2YZ :

$$\frac{Z'(t)}{a^2Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)}.$$

Поскольку левая часть этого равенства не зависит от x , а правая – не зависит от t , то обе они равны какой-то постоянной λ :

$$\frac{Z'(t)}{a^2Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda.$$

Таким образом, функции Z и Y должны удовлетворять уравнениям

$$Y''(x) = \lambda Y(x) \text{ и } Z'(t) = \lambda a^2 Z(t).$$

Решив эти два уравнения и перемножив их решения, получим решение вида (4) для (1).

Шаг 2. Частные решения должны удовлетворять граничному условию (3):

$$Y(0)Z(t) = Y(l)Z(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow Y(0) = Y(l) = 0.$$

Следовательно, функция $Y(x)$ должна удовлетворять следующему уравнению и граничным условиям:

$$Y''(x) = \lambda Y(x), \quad x \in [0, l], \quad (5)$$

$$Y(0) = Y(l) = 0. \quad (6)$$

Задача (5), (6) называется задачей Штурма-Лиувилля или спектральной задачей. Она состоит в нахождении тех значений λ , для которых существуют нетривиальные решения задачи (5), (6). Такие λ называются собственными значениями, а соответствующие им функции $Y(x)$ – собственными функциями задачи (5), (6).

Если $\lambda > 0$, то общее решение (5) имеет вид:

$$Y(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Условия (6) принимают вид

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Следовательно, положительные λ не могут быть собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля.

Если $\lambda = 0$, то $Y''(x) = 0$, т. е. $Y(x)$ – это линейная функция. Поскольку она равна нулю в двух точках ($Y(0) = Y(l) = 0$), то $Y \equiv 0$.

Итак, только отрицательные λ могут быть собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля.

Пусть $\lambda = -\mu^2$. Тогда общее решение уравнения (5):

$$Y(x) = c_1 \cdot \sin \mu x + c_2 \cdot \cos \mu x.$$

Из условия $Y(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$. Условия $Y(l) = 0$ записывается в виде

$$c_1 \cdot \sin \mu l = 0.$$

Так как $Y(x)$ – нетривиальное решение, $c_1 \neq 0$. Следовательно, $\mu l = k\pi \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \dots$, и существует счетное множество собственных значений

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Соответствующие им собственные функции

$$Y_k(x) = \sin \mu_k x, \quad \text{где } \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Итак, второй шаг завершается нахождением всех собственных значений и собственных функций задачи (5), (6).

Шаг 3. Требуется решить полученное уравнение для $Z(t)$. Для каждого $\lambda_k = -\mu_k^2$ уравнение имеет вид

$$z'(t) = -a^2 \mu_k^2 z(t).$$

Его решения:

$$z_k(t) = c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t}.$$

Мы нашли все решения уравнения (1) вида $Y(x)Z(t)$, которые удовлетворяют граничным условиям (3):

$$u_k(x, t) = c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \sin \mu_k x.$$

Шаг 4. Ищем решение всей задачи (1), (2), (3) в виде суммы ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \sin \mu_k x. \quad (7)$$

Из начальных условий при $t = 0$ находим

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Это ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по полной ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$. Значит, коэффициент c_k находится по формуле

$$c_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin(\mu_k s) ds. \quad (8)$$

Шаг 5. Теперь нужно обосновать, что ряд (7) сходится. Кроме того, нужно показать, что сходятся и ряды, полученные из него почленным дифференцированием: один раз по t и два раза по x . Наконец, останется показать, что это действительно решения исходной задачи для уравнения теплопроводности.

Лекция 12 (3 апреля 2020)

Рассмотрим 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t), \quad (x, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Её формальное решение даётся формулой:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x, \quad (4)$$

где

$$\mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad c_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \, ds \quad \text{— коэффициент Фурье } \varphi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Покажем, что при определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ ряд (4) представляет собой классическое решение рассматриваемой задачи, т.е. $u(x, t) \in C(\overline{Q})$, $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(Q)$, и удовлетворяет (1), (2), (3).

Отметим, что необходимым условием существования классического решения является условие согласования: $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Теорема 1 Пусть функция $\varphi(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0, l]$, ее производная $\varphi'(x) \in L_2(0, l)$ и выполнено условие согласования $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (1) (2) (3), представимое рядом (4) с коэффициентами (5). Это решение единственно.

Доказательство. Функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (3), т.к. им удовлетворяют все члены ряда (4). Начальное условие (2) так же выполнено, т.к. при $t = 0$ ряд (4) переходит в тригонометрический ряд Фурье функции $\varphi(x)$, удовлетворяющий условиям разложимости в тригонометрический ряд Фурье на $[0, l]$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(\mu_k x).$$

Осталось доказать, что ряд (4) сходится и функция $u(x, t)$, представимая этим рядом:

1. непрерывна в \overline{Q} ;
2. имеет в Q непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;
3. удовлетворяет уравнению (1).

Докажем эти утверждения. Оценим общий член ряда (4):

$$\left| c_k e^{-a^2 \mu_k t} \sin(\mu_k x) \right| \leq |c_k| \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}.$$

Если будет доказана сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$, то по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов, ряд (4) будет равномерно сходиться в \bar{Q} и его сумма будет непрерывной функцией. Докажем это. Имеем

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \, ds = -\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{\mu_k} \int_0^l \varphi(s) \cdot d(\cos \mu_k s) = \\ &= -\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{\mu_k} \varphi(s) \cos \mu_k s \Big|_0^l + \frac{2}{k\pi} \int_0^l \varphi'(s) \cos \mu_k s \, ds = \frac{l}{k\pi} c'_k. \end{aligned}$$

Здесь при интегрировании по частям мы учли граничное условие $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Через c'_k обозначили коэффициенты Фурье функции $\varphi'(x)$ по ортогональной системе $\{\cos \mu_k x\}$.

Согласно неравенству Бесселя ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c'_k|^2$ сходится. Воспользуемся неравенством

$$|c_k| = \frac{l}{k\pi} |c'_k| \leq \frac{l}{2\pi} \left(|c'_k|^2 + \frac{1}{k^2} \right).$$

Из последнего неравенства вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$. Следовательно, функциональный ряд (4) равномерно сходится в \bar{Q} , его сумма $u(x, t)$ непрерывная функция, причем

$$u(x, t) \rightarrow \varphi(x) \text{ при } t \rightarrow 0, \quad u(x, t) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0+ \text{ или } x \rightarrow l-0.$$

Теперь формально продифференцируем ряд (4) один раз по t и 2 раза по x и получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(\frac{a\pi}{l} \right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x.$$

Покажем, что при $t \geq \tau > 0$ эти ряды равномерно сходятся.

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, l]$, то она ограничена:

$$\exists M > 0 : \quad |\varphi(x)| \leq M \quad \forall x \in [0, l].$$

Следовательно,

$$|c_k| = \left| \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \, ds \right| \leq \frac{2}{l} \int_0^l M \, ds \leq 2M.$$

Поэтому при $t \geq \tau > 0$ получим оценку

$$\left| k^2 \cdot c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x \right| \leq 2M \cdot k^2 \cdot e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 \tau}.$$

Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\alpha k^2}, \text{ где } \alpha = \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \tau.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, т.к.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \cdot e^{-\alpha(2k+1)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряды, полученные формальным дифференцированием, сходятся равномерно. Следовательно, ряд (4) можно почленно дифференцировать один раз по t и 2 раза по x при $t \geq \tau > 0$, или, в силу произвольности τ , в области Q . При этом суммы полученных равномерно сходящихся рядов $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в Q . Осталось заметить, что частичная сумма ряда (4) удовлетворяет уравнению (1), т.к. оно линейно, т.е. сумма решений – решение. Следовательно и сама функция $u(x, t)$ является решением уравнения (1).

Докажем единственность классического решения. Если у задачи есть два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, то их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ также является решением уравнения (1) с нулевым начальным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in Q, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (7)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Покажем, что $u(x, t) \equiv 0$ в $(x, t) \in Q$.

Рассмотрим коэффициенты Фурье функции $u(x, t)$ при $t > 0$

$$c_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \cdot \sin \mu_k x \, dx.$$

Умножим теперь уравнение (6) на $\sin \mu_k x$ и проинтегрируем по $[0, l]$. Слева получим

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin \mu_k x \, dx = \frac{d}{dt} \int_0^l u(x, t) \sin \mu_k x \, dx = \frac{l}{2} \cdot c'_k(t).$$

Справа проинтегрируем по частям 2 раза:

$$\begin{aligned}
\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \sin \mu_k x \, dx &= \frac{\partial u}{\partial x} \sin \mu_k x \Big|_0^l - \mu_k \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \cos \mu_k x \, dx = \\
&= -\mu_k \cdot \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cos \mu_k x \, dx = \\
&= -\mu_k \cdot u(x, t) \cdot \cos \mu_k x \Big|_0^l + \mu_k^2 \cdot \int_0^l u(x, t) \sin \mu_k x \, dx = -\frac{l}{2} \cdot c_k(t) \cdot \mu_k^2.
\end{aligned}$$

Следовательно, функция $c_k(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt} c_k(t) = -a^2 \mu_k^2 c_k(t) \quad \Rightarrow \quad c_k(t) = c_k(0) e^{-a^2 \mu_k^2 t}.$$

Напомним, что, функция $u(x, t) = 0$ при $t = 0$, следовательно, $c_k(0) = 0$. Значит, $c_k(t) \equiv 0$ при всех $t \in [0, T]$. А если у непрерывной функции все коэффициенты Фурье равны нулю, то она тождественно равна нулю. Значит, $u(x, t) = 0$ при $(x, t) \in \overline{Q}$. ■

Перепишем решение задачи (4) в следующем виде, заменив коэффициенты c_k их значениями (5):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \cdot \sin \mu_k x \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \, ds.$$

Рассмотрим $t \geq \tau > 0$. При этом можно поменять местами интегрирование и суммирование:

$$u(x, t) = \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k x \cdot \sin \mu_k s \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \right) \varphi(s) \, ds,$$

так как в этой части прямоугольника Q

$$e^{-a^2 \mu_k t} \leq e^{-a^2 \mu_k \tau} = e^{-a^2 \frac{\pi^2}{l^2} k^2 \tau} \leq \frac{M_n}{k^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

для некоторого M_n , и, следовательно, ряд

$$\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k x \cdot \sin \mu_k s \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t}$$

сходится равномерно при $\tau \leq t \leq T$, $x, s \in [0, l]$.

Сумма этого ряда называется функцией Грина $G(x, s, t)$ уравнения теплопроводности (точнее, первой краевой задачи уравнения теплопроводности).

$$G(x, s, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k x \cdot \sin \mu_k s \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t}, \quad x \in [0, l], \quad s \in [0, l], \quad t > 0.$$

Так как в любой фиксированной точке прямоугольника Q значение $t > 0$ и, следовательно, справедливы оценки (9), то всюду в этом прямоугольнике функция Грина – бесконечно дифференцируемая функция, которая, (при любом фиксированном s), очевидно, удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$ и граничному условию $G(0, s, t) = G(l, s, t)$.

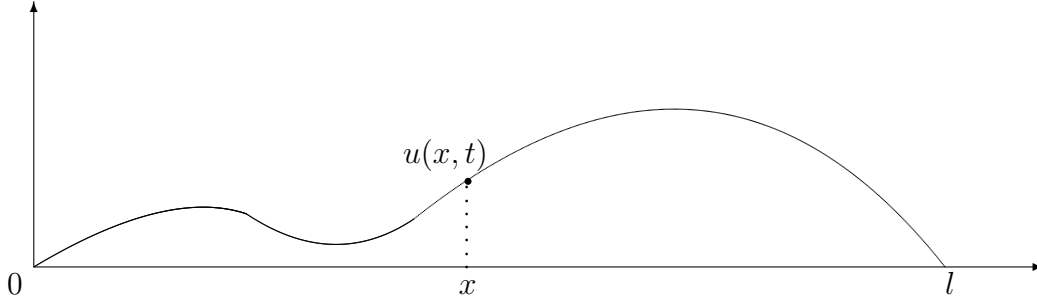
Таким образом, при указанных в теореме условиях на начальную функцию $\varphi(x)$ решение $u(x, t)$ задачи в Q (т.е., при $t > 0$) является бесконечно дифференцируемой функцией, которая записывается в виде интеграла

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, s, t) \varphi(s) ds$$

при $t = 0$ имеем $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Лекция 13 (10 апреля 2020)

§1. Первая краевая задача для уравнения упругих колебаний струны



Предполагается, что струна – это гибкая нить, совершающая колебания в направлении, перпендикулярном оси x . Струна имеет длину l и её концы закреплены в точках 0 и l . Пусть, как и раньше $Q = \{(x, t), x \in [0, l], t \in (0, T)\}$.

Задача Требуется найти функцию $u(x, t) \in C^1(\bar{Q})$, у которой $\exists \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C(Q)$ и которая удовлетворяет:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in Q, \quad \text{уравнение колебаний струны} \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in (0, l), \quad \text{начальные условия} \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad \text{граничные условия (закрепленные концы)} \quad (3)$$

Задача (1), (2), (3) моделирует упругие колебания струны с закрепленными концами. Коэффициент a имеет размерность скорости. Его физический смысл – скорость распространения бегущих волн в струне.

Опишем этапы построения решения $u(x, t)$ задачи (1) – (3).

Шаг 1. Разделение переменных. Ищем частные решения вида: $u(x, t) = y(x) \cdot z(t)$. Подставляем в уравнение: $z''(t) \cdot y(x) = a^2 z(t) \cdot y''(x)$.

$$\frac{z''(t)}{a^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda = const.$$

Шаг 2. Совпадает с шагом 2 метода Фурье решения уравнения теплопроводности. Решается задача Штурма-Лиувилля

$$y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(l) = 0. \quad (4)$$

Её решение имеет вид

$$\lambda = -\mu_k^2, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad y_k(x) = \sin \mu_k x.$$

Нашли все собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (4).

Шаг 3. Решаем уравнение для второго сомножителя:

$$z''(t) + a^2 \mu_k^2 z(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$z_k(t) = C_k \cdot \cos(a\mu_k t) + D_k \cdot \sin(a\mu_k t).$$

Тем самым найдены все решения уравнения (1) вида $y(x)z(t)$. Любая линейная комбинация таких функций $u_k(x, t)$, очевидно, также удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (3). Но такая (конечная) линейная комбинация, может не удовлетворять начальному условию (2) при произвольных гладких функциях φ и ψ .

Шаг 4. Решение задач (1), (2), (3) ищется в виде бесконечного ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t), \quad \text{где} \quad (5)$$

$$u_k(x, t) = (C_k \cos a\mu_k t + D_k \sin a\mu_k t) \sin \mu_k x. \quad (6)$$

Здесь C_k и D_k – некоторые коэффициенты, которые необходимо определить по начальным данным задачи φ и ψ .

Сначала будем действовать формально, не заботясь о сходимости рядов. Подставим в этот ряд начальные условия при $t = 0$ (для второго условия необходимо взять производную по времени).

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin \mu_k x = \varphi(x), \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\mu_k D_k \cdot \sin \mu_k x = \psi(x). \quad (8)$$

Эти равенства представляют собой разложение функций φ и ψ в ряд Фурье по ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$. Поэтому, находим коэффициенты Фурье:

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi \sin \mu_k x \, dx, \quad (9)$$

$$a\mu_k D_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad \text{т.е.}$$

$$D_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \, dx. \quad (10)$$

Итак, мы нашли формулу (5) и (6) для решения задачи (1), (2), (3), в которой коэффициенты C_k и D_k определяются по формулам (9) и (10).

Шаг 5. Обоснование полученных формул.

Теорема 1 Пусть функция $\varphi(x) \in C^3[0, l]$, причем выполнены условия согласования

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \quad (11)$$

а функция $\psi(x) \in C^2[0, l]$, причем

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (12)$$

Тогда функция $u(x, t)$, заданная рядом (5), в котором коэффициенты C_k и D_k определены в (9) и (10), принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$, удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3). Такая функция единственная.

Доказательство. (вкратце)

Интегрируем по частям три раза интеграл из формулы (9) с учётом условий (11) на функцию φ :

$$C_k = -\frac{2}{l} \cdot \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \cdot \int_0^l \varphi'''(x) \cos \mu_k x \, dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{p_k}{k^3}, \quad (13)$$

где p_k – коэффициент Фурье функции $\varphi'''(x)$ по ортогональной системе $\{\cos \mu_k x\}$.

Аналогично, интегрируем два раза по частям в формуле (10) с учётом условий (12) на ψ :

$$D_k = -\frac{2}{la} \cdot \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \cdot \int_0^l \psi''(x) \sin \mu_k x \, dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{q_k}{k^3}, \quad (14)$$

где q_k – коэффициенты Фурье функции $\psi''(x)$ по ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$.

Поскольку функции φ''' и ψ'' непрерывны на отрезке $[0, l]$, то они принадлежат $L_2[0, l]$ и по неравенству Бесселя сходятся ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \leq \frac{2}{l} \int_0^l [\varphi'''(x)]^2 \, dx; \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 \leq \frac{2}{l} \int_0^l [\psi''(x)]^2 \, dx \quad (15)$$

Подставим (13) и (14) в ряд (5) и получим:

$$u(x, t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} (p_k \cdot \sin a\mu_k t + q_k \cdot \cos a\mu_k t) \sin \mu_k x. \quad (16)$$

Этот ряд при любом $(x, t) \in \bar{Q}$ мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$\frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} (|p_k| + |q_k|),$$

Поэтому ряд (16) в силу признака Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно в \bar{Q} . Следовательно, его сумма непрерывна в \bar{Q} .

Теперь покажем возможность двукратного почленного дифференцирования ряда (5) (или, что тоже самое, ряда (16)) по переменным x и t . Для этого покажем, что ряды,

полученные из (16) двухразовым дифференцированием сходятся равномерно в \bar{Q} . Формально дифференцируем и получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{l}{\pi}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (p_k \cdot \sin(a\mu_k t) + q_k \cdot \cos(a\mu_k t)) \sin \mu_k x, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{la^2}{\pi}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (p_k \cdot \sin(a\mu_k t) + q_k \cdot \cos(a\mu_k t)) \sin \mu_k x. \quad (18)$$

Оба этих ряда, при любом $(x, t) \in \bar{Q}$, мажорируется рядом:

$$c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|p_k| + |q_k|).$$

Сходимость последнего ряда следует из очевидных оценок:

$$\frac{1}{k} |p_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |p_k|^2 \right), \quad \frac{1}{k} |q_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |p_k|^2 \right).$$

Теперь опять на основании признака Вейерштрасса ряды (17) и (18) абсолютно и равномерно сходятся. Следовательно, функции $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ непрерывны в \bar{Q} . Подставляя (17) и (18) в уравнение (1) убеждаемся, что это решение, которое удовлетворяет (2) и (3).

Единственность решения задачи доказывается аналогично единственности решения уравнения теплопроводности исходя из однозначного восстановления непрерывных функций по их коэффициентам Фурье. Основной момент этого доказательства также содержится в доказательстве теоремы 2 в следующем параграфе. ■

§2. Решение уравнения вынужденных колебаний упругой струны

Рассматривается следующая

Задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3)$$

Здесь $f(x, t)$ – плотность внешней силы, которая зависит x и t .

Решение задачи (1), (2), (3) будем искать в виде ряды Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k x. \quad (4)$$

Здесь, как всегда, $\sin \mu_k x$ – решение задачи Штурма-Лиувилля. Функции

$$p_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \mu_k x \, dx$$

являются коэффициентами Фурье искомого решения $u(x, t)$, которые следует определить.

Будем предполагать, что $f(x, t) \in C(\bar{Q})$, причем

$$\exists \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, t) \in C(\bar{Q}) \quad \text{и} \quad f(0, t) = f(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(l, t) = 0 \quad (5)$$

(условия согласования).

Разложим (известную) функцию $f(x, t)$ в ряд Фурье по переменной x :

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \cdot \sin \mu_k x, \quad \text{где} \quad q_k(x) = \frac{1}{2l} \int_0^l f(x, t) \cdot \sin \mu_k x \, dx. \quad (6)$$

Если правую часть этого равенства проинтегрировать по частям 3 раза и воспользоваться условиями (5), то можно получить, что

$$|q_k| \leq \frac{M}{k^3}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

(внеинтегральные члены обратятся в нуль в силу граничных условий, наложенных на функцию $f(x, t)$).

Будем предполагать, что решение $u(x, t) \in C^2(\bar{Q})$. Обе части уравнения (4) умножим на $\sin \mu_k x$ и проинтегрируем по x от 0 до l :

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \sin \mu_k x \, dx = a^2 \cdot \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \mu_k x \, dx + \frac{l}{2} \cdot q_k(t). \quad (8)$$

Интеграл в левой части допускает перестановку операций дифференцирования и интегрирования, поэтому он равен

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^l u(x, t) \sin \mu_k x \, dx \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{l}{2} \cdot p_k(t) \right).$$

Интеграл в правой части (8) проинтегрируем по частям 2 раза:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cdot \sin \mu_k x \, dx &= \sin \mu_k x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \mu_k \cdot \cos \mu_k x \, dx = \\ &= -u(x, t) \cdot \cos \mu_k x \Big|_0^l - \int_0^l \mu_k^2 \cdot u(x, t) \sin \mu_k x \, dx = -\mu_k^2 \cdot \frac{l}{2} p_k(t). \end{aligned}$$

Внеинтегральные члены первый раз равны нулю, т.к. $\sin \mu_k x = 0$ при $x = 0, l$. А во второй раз они равны нулю в силу граничных условий (3).

Следовательно, функция $p_k(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2} p_k(t) = -\mu_k^2 \cdot p_k(t) + q_k(t). \quad (9)$$

Из условий (2) находим начальные условия:

$$p_k(0) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_k(0) = 0. \quad (10)$$

(Отметим, что из уравнений (9) и (10) следует теорема единственности для однородного уравнения колебаний струны, для которого $q_k(t) \equiv 0$, и, если $p_k(0) = 0$, $p'_k(0) = 0$, то $p_k(t) \equiv 0$.)

Решение задачи Коши (8), (10) получается по формуле:

$$p_k(t) = \frac{1}{a\mu_k} \int_0^t \sin(a\mu_k \cdot (t-s)) q_k(s) ds \quad (11)$$

Ее можно проверить прямой подстановкой в уравнение.

В итоге построено формальное решение задачи (1), (2), (3) в виде ряда (4), в котором коэффициенты $p_k(t)$ вычисляются по формуле (11).

Теорема 2 При выполнении условий (5) существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (1), (3), (3), $u \in C^2(\bar{Q})$. Это решение записывается в виде ряда (4), где коэффициенты $p_k(t)$ и $q_k(t)$ определяются по формулам (6) и (11).

Доказательство. По построению функция $u(x, t)$ сумма ряда (4) формально удовлетворяет уравнению, начальным и граничным условиям. Действительно,

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(0) \cdot \sin \mu_k x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} p'_k(0) \cdot \sin \mu_k x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (p''_k(t) \sin \mu_k x + a^2 \mu_k^2 p_k(t) \sin \mu_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \mu_k x = f(x, t).$$

Поэтому, доказательство сводится к проверке того, что ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k x$$

и ряды, полученные его однократным и двукратным дифференцированием по t и x , равномерно сходятся в \bar{Q} .

Для равномерной сходимости упомянутых рядов достаточно получить оценку их коэффициентов. Напомним, что $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$. Поэтому из оценки (7) и из формулы (11) получаем следующие неравенства:

$$|p_k(t)| \leq \frac{M_1}{k^4}, \quad |p'_k(t)| \leq \frac{M_2}{k^3}, \quad |p''_k(t)| \leq \frac{M_2}{k^2},$$

из которых получается равномерная сходимость всех нужных рядов. ■

Лекция 14 (17 апреля 2020)

§1. Задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим более общее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u, \quad x \in [0, l],$$

или уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u, \quad x \in [0, l].$$

Дополним эти уравнения граничными условиями:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Решая это уравнение методом разделения переменных, т.е. ища частные решения вида

$$u(x, t) = Y(x)Z(t)$$

приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$\begin{aligned} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) &= \lambda y(x), \\ y(0) = y(l) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Можно в (1) рассмотреть более общие граничные условия:

$$\alpha y'(0) + \beta y(0) = 0, \quad \gamma y'(l) + \delta y(l) = 0,$$

где

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \quad \gamma^2 + \delta^2 \neq 0.$$

Задача (1) называется задачей Штурма–Лиувилля: Требуется найти все числа $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых существуют ненулевые решения уравнения (1), а также необходимо найти все такие решения.

Обычно предполагается, что

$$p \in C^1[0, l], q \in C[0, l], \quad p(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, l] \quad (\text{условие “эллиптичности”}).$$

Для определенности будем считать, что $p(x) > 0$.

С помощью замены независимой переменной $\xi = \int_0^x p(x)^{-1/2} dx$ и неизвестной функции $z = p^{1/2}(x)y$ задача (1) сводится к более простой задаче, в которой $p(x) \equiv 1$. (Проверьте это!) Поэтому, вместо (1) будем изучать задачу:

$$\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) &= \lambda y(x), \\ y(0) = y(l) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Мы будем считать, что $q(x) \geq 0$. Это не является ограничением, так как можно добиться выполнения этого неравенства, прибавив к λ некоторую фиксированную константу. При $q \equiv 0$ мы уже знаем решение задачи (2):

$$y(x) = \sin \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

§2. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля

Введем оператор Штурма-Лиувилля

$$L = -\frac{d}{dx^2} + q(x),$$

который является линейным (неограниченным) оператором в пространстве $L_2[0, l]$. Его область определения \mathcal{D}_L состоит из функций $v(x) \in C^2[0, l]$, для которых $v(0) = v(l) = 0$.

Задача Штурма-Лиувилля состоит в нахождении всех собственных значений и собственных функций оператора L :

$$Ly = \lambda y, \quad y \in \mathcal{D}_L.$$

Сформулируем и докажем ряд свойств этого оператора.

Утверждение 1 *Оператор L симметричен, т. е.*

$$(Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{D}_L,$$

где (\cdot, \cdot) – обозначает скалярное произведение в $L_2[0, l]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} (Lv_1, v_2) - (v_1, Lv_2) &= \int_0^l (-v_1''v_2 + v_1v_2'')dx = \\ &= \int_0^l \frac{d}{dx}(-v_1'v_2 + v_1v_2')dx = (-v_1'v_2 + v_1v_2')\Big|_0^l = 0 \end{aligned}$$

в силу граничных условий. ■

Утверждение 2 *Оператор L положителен и все его собственные значения положительны.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} (Lv, v) &= \int_0^l (-v''v + q(x)v^2)dx = \\ &= \int_0^l ((v'(x))^2 + q(x)v^2(x))dx > 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_L, v \neq 0. \end{aligned}$$

Здесь мы применили интегрирование по частям.

Поэтому, если $Lv = \lambda v$, то $\lambda(v, v) = (Lv, v) > 0$ при $v \neq 0$, т.е. $\lambda > 0$. ■

Утверждение 3 Все собственные функции с разными собственными значениями ортогональны в $L_2[0, l]$.

Доказательство. Пусть

$$Lv_1 = \lambda_1 v_1, \quad Lv_2 = \lambda_2 v_2.$$

Тогда

$$\lambda_1(v_1, v_2) = (Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2) = \lambda_2(v_1, v_2).$$

Поэтому, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(v_1, v_2) = 0$.

■

Утверждение 4 Все собственные значения являются однократными, т.е., все собственные подпространства одномерны.

Доказательство. Действительно, по теореме единственности любое решение ОДУ вида

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

которое обращается в нуль при $x = x_0$, должно быть пропорционально (единственному) решению этого уравнения с начальными условиями

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1.$$

■

Сформулируем и докажем теорему Штурма.

Теорема 1 (Штурм) Пусть даны два уравнения

$$-y'' = q_1(x)y, \tag{1}$$

$$-z'' = q_2(x)z, \quad \text{причем } q_1(x) \geq q_2(x). \tag{2}$$

Пусть их решения $y(x)$ и $z(x)$ определены на отрезке $[a, b]$, причем $z(a) = z(b) = 0$ и $z(x)$ не тождественный ноль. Тогда

ЛИБО на интервале (a, b) найдется точка x_0 , где $y(x_0) = 0$,

ЛИБО $q_1(x) \equiv q_2(x)$ на $[a, b]$ и $y(x) = Cz(x)$, $C = \text{const}$.

Доказательство. Можно считать, что a и b – это соседние нули функции z , т.е. $z(x) > 0$ при $x \in (a, b)$. (Нули этой функции не могут сгущаться, т.к. в точке сгущения x^* будем иметь $z(x^*) = 0$ и $z'(x^*) = 0$, но $z(x)$ – это решение обыкновенного дифференциального уравнения (2) второго порядка и по теореме единственности $z(x) \equiv 0$). Тогда $z'(a) > 0$ и $z'(b) < 0$ (опять по теореме единственности!).

Если функция $y(x)$ не обращается в ноль на (a, b) , то можно считать, что $y(x) > 0$ на (a, b) . Рассмотрим определитель Вронского

$$W(x) = y(x)z'(x) - y'(x)z(x).$$

Дифференцируем его:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(x) &= y(x)z''(x) - y''(x)z(x) = \\ &= (q_1(x) - q_2(x))y(x)z(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Интегрируем по $[a, b]$ и получаем, что

$$W(b) - W(a) \geq 0.$$

$$\text{Причем, равенство} \iff q_1(x) \equiv q_2(x) \quad \forall [a, b].$$

С другой стороны, из сделанных предположений вытекает, что $y(a) \geq 0$ и $y(b) \geq 0$, т.е.

$$\begin{aligned} W(b) - W(a) &= y(b)z'(b) - y(a)z'(a) \leq 0 \\ \text{причем равенство} \iff &y(a) = y(b) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при сделанных предположениях

$$W(b) - W(a) = 0, \text{ откуда } q_1(x) \equiv q_2(x) \quad \forall [a, b] \text{ и } y(a) = y(b) = 0.$$

Однако, $z(a) = z(b) = 0$, и, следовательно $z(x)$ и $y(x)$ – это решения одного и того же дифференциального уравнения второго порядка, причем $z(a) = y(a) = 0$. Тогда (по теореме единственности) они пропорциональны, т.е. $y(x) = Cz(x)$. ■

Утверждение 5 Каждое собственное значение λ оператора Штурма-Лиувилля удовлетворяет неравенству ($q(x) \geq 0$):

$$\lambda \geq \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Доказательство. Если $q(x) \equiv 0$, то это очевидно. Пусть $q(x) \not\equiv 0$. Как мы знаем, $\lambda > 0$. Рассмотрим соответствующую собственную функцию оператора Штурма-Лиувилля:

$$-z'' = (\lambda - q(x))z, \quad z(0) = z(l) = 0.$$

Сравним решение этого уравнения с решением $y(x) = \sin \sqrt{\lambda}x$ уравнения

$$-y'' = \lambda y.$$

Применим теорему Штурма, в которой $q_1(x) = \lambda \geq \lambda - q(x) = q_2(x)$. Тогда функция $y(x)$ где-то обращается в ноль на интервале $(0, l)$. Но это возможно, только если выполнено неравенство

$$\sqrt{\lambda}l \geq \pi \implies \sqrt{\lambda} \geq \frac{\pi}{l}.$$

■

Займемся теперь исследованием асимптотических свойств собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Обозначим для удобства $\lambda = k^2$. Тогда основное уравнение примет вид

$$-y'' + q(x)y = k^2y, \quad k > 0. \tag{3}$$

Обозначим $\psi = \psi(x, k)$ – решение уравнения (3) с начальными условиями

$$\psi(0, k) = 0, \quad \psi'(0, k) = k$$

(если $q(x) \equiv 0$, то $\psi(x, k) = \sin kx$).

Следовательно, собственные значения оператора Штурма-Лиувилля имеют вид $\lambda = k^2$, где k такое, что $\psi(l, k) = 0$.

Из теоремы Штурма следует, что количество нулей функции $\psi(x, k) = 0$, лежащих на любом фиксированном отрезке $[0, a]$, где $a \leq l$, является неубывающей функцией k . Поэтому с ростом k все нули функции $\psi(x, k)$ сдвигаются влево. Собственные значения соответствуют тем k , при которых в точке l появляется новый нуль.

Поскольку количество этих нулей конечно при любом k , то собственные значения образуют дискретную последовательность

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

которая, как легко видеть бесконечна. В самом деле, по теореме Штурма, число нулей функции $\psi(x, k)$ на $(0, l)$ не меньше, чем число нулей на $(0, l)$ у соответствующего решения уравнения

$$-y'' + My = k^2 y, \quad \text{где } M = \max_{x \in [0, l]} q(x).$$

Но этим решением является функция $\sin(\sqrt{k^2 - M}x)$ при $k^2 > M$, и число ее нулей на $(0, l)$ неограниченно растет при $k \rightarrow +\infty$. Доказана

Теорема 2 *Задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное число решений, все ее собственные значения λ_n положительны и $\lambda_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Собственные функции $y_n(x)$, соответствующие λ_n , ортогональны. Собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $(n - 1)$ нулей на интервале $[0, l]$.*

Опишем асимптотическое поведение больших собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Это легко сделать с помощью теоремы Штурма. Более точно, собственные значения оператора

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

заклучены между собственными значениями операторов

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{и} \quad L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + M,$$

где $M = \max_{x \in [0, l]} q(x)$. Поскольку собственные значения операторов L_1 и L_2 равны, соответственно,

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + M, \quad n = 1, 2, \dots,$$

получаем

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \leq \lambda_n \leq \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + M,$$

откуда следует, что

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Можно также показать, что

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

В завершение сформулируем без доказательства теорему о полноте.

Теорема 3 *Собственные функции $\{y_n(x)\}$ задачи Штурма-Лиувилля образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_2[0, l]$.*

Полностью доказательство этой теоремы, а также о других свойствах задачи Штурма-Лиувилля, можно прочитать в книге М.А.Шубин, “Лекции об уравнениях математической физики”.

Лекция 15 (24 апреля 2020)

§1. Интеграл Фурье. Основная теорема

На прошлых лекциях были установлены условия, при выполнении которых периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, т. е. представлена в виде суперпозиции гармонических колебаний. Попытаемся сделать что-то аналогичное для непериодических функций. Мы покажем, что похожее представление возможно при определенных условиях, но только не в виде ряда Фурье, а в виде интеграла Фурье.

Сначала приведем некоторые наводящие соображения. Пусть функция f на каждом интервале удовлетворяет условиям, обеспечивающим ее разложимость в ряд Фурье. Иначе говоря, пусть f суммируема на любом конечном интервале и в каждой точке выполнено условие Дини. Рассматривая f , скажем, на отрезке $[-\ell, \ell]$, мы можем написать ее разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} x + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x \right]. \quad (1)$$

Подставим сюда выражения для коэффициентов a_k и b_k :

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt, \quad b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt.$$

Получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} x \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt + \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt \right] = \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \left[\cos \frac{k\pi}{\ell} x \cos \frac{k\pi}{\ell} t + \sin \frac{k\pi}{\ell} x \sin \frac{k\pi}{\ell} t \right] dt. \end{aligned}$$

Преобразовывая последнее выражение, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} (t-x) dt. \quad (2)$$

Дополним предположения о функции f еще одним: пусть эта функция абсолютно интегрируема на всей оси, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty. \quad (3)$$

Перейдем в равенстве (2) к пределу при $\ell \rightarrow \infty$ (пока формально). Тогда в силу (3), первое слагаемое в правой части (2) стремится к нулю. Второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k) \Delta \lambda$$

(распространенную на бесконечный промежуток) для интеграла

$$\int_0^{\infty} F(\lambda) d\lambda \quad \text{от функции} \quad F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt,$$

если положить $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}$, $\Delta\lambda = \frac{\pi}{\ell}$.

Поэтому формально в пределе при $\ell \rightarrow \infty$ получим равенство:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt. \quad (4)$$

Это и есть искомое представление. Введем обозначения:

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

Тогда равенство (4) можно переписать в следующем виде, аналогичном ряду Фурье:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) d\lambda. \quad (5)$$

Это равенство называется интегралом Фурье или формулой Фурье. Теперь докажем эту формулу строго.

Теорема 1 Если функция f абсолютно интегрируема на всей прямой и в точке x удовлетворяет условию Дини, то имеет место равенство:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt. \quad (6)$$

Хотим проверить, что $\lim_{A \rightarrow \infty} J(A)$ существует и равен $f(x)$. Поскольку f абсолютно интегрируема, то внутренний интеграл в (6) сходится, а двойной интеграл сходится абсолютно. Используя теорему Фубини, изменим порядок интегрирования в (6):

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^A f(t) \cos \lambda(t-x) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin A(t-x)}{t-x} dt.$$

Сделаем замену переменных $t - x = z$ и приведем этот интеграл к виду:

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+z) \frac{\sin Az}{z} dz. \quad (7)$$

Воспользуемся следующим тождеством:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Az}{z} dz = 1 \quad (A > 0) \quad (\text{интеграл Дирихле}).$$

(сделав замену $Az = u$, легко проверить, что левая часть не зависит от A). Тогда разность $J(A) - f(x)$ запишем в виде:

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az dz. \quad (8)$$

Представим это выражение в виде суммы трех слагаемых:

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az dz + \frac{1}{\pi} \int_{|z| \geq N} \frac{f(x+z)}{z} \sin Az dz - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|z| \geq N} \frac{\sin Az}{z} dz.$$

Второй и третий члены справа представляют собой сходящиеся интегралы, и каждый из них можно сделать меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, если число N достаточно велико. Первое слагаемое справа (при фиксированном N) стремится к нулю, когда $A \rightarrow \infty$ (в силу леммы Римана из Лекции 6 и условия Дини). Таким образом, получаем, что

$$\lim_{A \rightarrow \infty} (J(A) - f(x)) = 0,$$

что и требовалось ■

§2. Интеграл Фурье в комплексной форме

В интегральной формуле Фурье (4) внутренний интеграл представляет собой четную функцию от λ , что позволяет переписать эту формулу в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt. \quad (9)$$

Далее, из абсолютной интегрируемости f следует, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt$$

существует и является нечетной функцией λ . Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt = 0. \quad (10)$$

Этот интеграл следует понимать в смысле главного значения, т. е. как $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N$.

Прибавим к (9) равенство (10), умноженное на $-i$. Ввиду того, что $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt.$$

Это равенство называется комплексной формулой Фурье (в смысле главного значения).

§3. Преобразование Фурье и формула обращения

Интегральную формулу Фурье можно расчленить на два равенства. Положим

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \quad (1)$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (2)$$

Отметим, что формула (1) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции f . Таким образом, каждой функции $f \in L_1(-\infty, \infty)$ мы с помощью формулы (1) сопоставляем определенную функцию $g(\lambda)$, заданную при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Функция $g(\lambda)$ называется преобразованием Фурье исходной функции $f(x)$. Формула (2) выражает функцию f через ее преобразование Фурье. Она называется формулой обращения для преобразования Фурье. Обратим внимание на сходство между формулами (1) и (2). Они отличаются друг от друга только знаком в показателе экспоненты и множителем $\frac{1}{2\pi}$ перед интегралом.

Однако при всем сходстве формул (1) и (2), они, по существу, различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле Лебега (поскольку $f \in L_1(-\infty, \infty)$), а во второй, вообще говоря, лишь в смысле главного значения. Кроме того, равенство (1) это определение функции g , а равенство (2), представляющее собой иную формулу записи формулы Фурье, содержит утверждение, что стоящий справа интеграл сходится к исходной функции f . Как мы видели выше, для обеспечения этого равенства на f надо наложить, помимо суммируемости, еще дополнительные условия, например, условие Дини.

Лекция 16 (1 мая 2020)

§1. Однозначность преобразования Фурье и примеры

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Мы определили преобразование Фурье функции f :

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt. \quad (1)$$

Помимо этого, мы установили, что при выполнении условия Дини в точке x имеет место формула обращения преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) аналогичны тому, что мы имеем для рядов Фурье. Действительно, коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx$$

определены для всякой $f \in L_1[-\pi, \pi]$, однако сходимость ряда Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

к функции $f(x)$ (играющую здесь роль формулы обращения) можно гарантировать лишь при выполнении определенных условий (например, при условии Дини).

Вместе с тем, для преобразования Фурье имеет место следующее

Утверждение 1 Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и выполнено

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{преобразование Фурье от } f).$$

Будем дополнительно предполагать, что функция $f(x)$ является кусочно непрерывной на каждом конечном интервале. Тогда $f(x) = 0$ почти всюду.

Доказательство. Из предполагаемого равенства, очевидно, вытекает, что для любых $t, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x} dx = 0.$$

Положим теперь $\varphi(x) = \int_0^{\xi} f(x+t)dt$, где ξ – произвольное фиксированное число. Применяя теорему Дини и используя условия, наложенные на функцию f , легко видеть,

что функция φ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет тому же интегральному условию, что и функция $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\lambda x} dx = 0 \quad (\text{преобразование Фурье от } \varphi)$$

при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Но, как легко видеть, функция $\varphi(x)$ имеет кусочно непрерывную производную, которая равна $f(x)$ в точках непрерывности x функции f . В частности, эта функция почти всюду удовлетворяет условию Дини. Поэтому, в силу Теоремы 1 из прошлой лекции, имеет место формула обращения, и, следовательно, функция $\varphi(x)$ почти всюду обращается в ноль, т. к. ее преобразование Фурье равно нулю. Кроме того, $\varphi(x)$ непрерывна, так что $\varphi(x) \equiv 0$. Следовательно, при любом $\xi \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\xi} f(t) dt = 0.$$

Значит, $f(x) = 0$ почти всюду. ■

Следствие 1 Преобразование Фурье однозначно определяет функцию f .

Рассмотрим некоторые примеры преобразования Фурье:

Пример 1 Пусть $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

Найдем преобразование Фурье этой функции:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} (\cos \lambda x - i \sin \lambda x) dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-a x} \cos \lambda x dx.$$

После двукратного интегрирования по частям, находим

$$g(\lambda) = \frac{2a}{\lambda^2 + a^2}.$$

Пример 2 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a, \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-a}^a e^{-i\lambda x} dx = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2 \sin \lambda a}{\lambda}.$$

Пример 3 $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$.

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

Далее можно вычислять явно, а можно воспользоваться формулой обращения для Примера 1:

$$e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{\lambda^2 + a^2} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Поменяем в этой формуле x на $-\lambda$, а λ на x и получим

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\lambda|}.$$

Пример 4 $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos \lambda x dx \quad (\text{в силу четности } f(x)).$$

Дифференцируем по λ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x \sin \lambda x dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \lambda x d\left(\frac{e^{-ax^2}}{2a}\right) = \\ &= \frac{\sin \lambda x \cdot e^{-ax^2}}{2a} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \lambda \cos \lambda x dx = -\frac{\lambda}{2a} g(\lambda) \Rightarrow \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\lambda}{2a} g(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Разделим переменные:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \ln g(\lambda) &= -\frac{\lambda}{2a} = \frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{\lambda^2}{4a} \right). \\ g(\lambda) &= C e^{-\lambda^2/4a}. \end{aligned}$$

Найдем C подстановкой $\lambda = 0$:

$$C = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Последний интеграл называется интегралом Пуассона или интегралом Гаусса. Таким образом,

$$g(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\lambda^2/4a}.$$

Возьмем $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = e^{-x^2/2}$, $g(\lambda) = \sqrt{2\pi} e^{-\lambda^2/2}$. Это собственная функция преобразования Фурье: преобразование Фурье переводит ее в себя (с точностью до множителя).

§2. Основные свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье функции f будем обозначать через $F[f]$. Иначе говоря, F – это линейный оператор, определенный на пространстве $L_1(\mathbb{R})$ и ставящий в соответствие каждой функции этого пространства ее преобразование Фурье (при этом оно, вообще говоря, не принадлежит $L_1(\mathbb{R})$, см. Пример 2).

Утверждение 2 Если последовательность $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ сходится в метрике пространства $L_1(\mathbb{R})$, то последовательность их преобразований Фурье $F[f_n](\lambda)$ сходится равномерно на \mathbb{R}_λ .

Доказательство. Равномерная сходимость $F[f_n]$ вытекает из очевидной оценки

$$|F[f_n](\lambda) - F[f_m](\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)| dx.$$

■

Утверждение 3 Преобразование Фурье $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ представляет собой ограниченную непрерывную функцию, которая стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Ограниченность функции $g = F[f]$ сразу следует из оценки

$$|g(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Далее, если f – характеристическая функция интервала (a, b) , то для нее

$$g(\lambda) = \int_a^b e^{-i\lambda x} dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}.$$

Эта функция, очевидно, непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Ввиду того, что оператор F линеен, отсюда вытекает, что преобразование Фурье любой элементарной функции (т. е. линейной комбинации характеристических функций интервалов) также является непрерывной функцией, которая стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Наконец, элементарные функции всюду плотны в $L_1(\mathbb{R})$, поэтому для $f \in L_1(\mathbb{R})$ найдется последовательность $\{f_n\}$ элементарных функций, сходящаяся к f в $L_1(\mathbb{R})$. Тогда, в силу Утверждения 1, последовательность $g_n(\lambda) = F[f_n](\lambda)$ сходится равномерно на \mathbb{R}_λ к функции $g(\lambda) = F[f](\lambda)$. Значит, предельная функция g тоже непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$. ■

Утверждение 4 Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, функция f имеет кусочно непрерывную производную на каждом конечном интервале, и при этом $f' \in L_1(\mathbb{R})$, то имеет место равенство

$$F[f'] = i\lambda F[f].$$

Иными словами, дифференцированию функции отвечает домножение ее преобразования Фурье на $i\lambda$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница, функцию $f(x)$ можно записать в виде:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

Из абсолютной интегрируемости f' следует, что стоящее здесь справа выражение имеет пределы при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$. Эти пределы могут быть только нулевыми, т. к. иначе $f(x)$ не была бы интегрируемой на \mathbb{R} . Учитывая это, получаем с помощью интегрирования по частям:

$$F[f'] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx = f(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda F[f].$$

■

Следствие 2 Если f такова, что $f^{(k-1)}$ имеет кусочно непрерывную производную на каждом конечном интервале и, при этом $f, f', \dots, f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f].$$

§3. Связь между степенью гладкости функции и скоростью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье

Напомним, что преобразование Фурье $F[f](\lambda)$ стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Поэтому из приведенного выше тождества получаем, что

$$|F[f](\lambda)| = \frac{|F[f^{(k)}](\lambda)|}{|\lambda|^k} \rightarrow 0 \quad (|\lambda| \rightarrow \infty),$$

т.е. $F[f](\lambda)$ убывает на бесконечности быстрее чем $|\lambda|^{-k}$, если известно, что функции $f(x)$ имеет суммируемые производные до порядка k . Значит, чем больше производных имеет функция f , тем быстрее убывает по λ ее преобразование Фурье.

Следствие 3 Если существуют суммируемые производные f' и f'' , то $F[f] \in L_1(\mathbb{R}_\lambda)$.

Действительно, из указанных условий вытекает, что $F[f](\lambda)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $|\lambda|^{-2}$, и, следовательно, является суммируемой функцией.

Выше было показано, что чем больше производных имеет функция f , тем быстрее убывает на бесконечности ее преобразование Фурье. Справедливо также и “двойственное” свойство.

Утверждение 5 Пусть функции $f(x)$ и $xf(x)$ являются суммируемыми, тогда функция $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ дифференцируема при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, причем

$$g'(\lambda) = F[(-ix)f(x)](\lambda). \quad (3)$$

Доказательство. Действительно, продифференцируем по λ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx,$$

который определяет функцию $g(\lambda)$, и получим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-i\lambda x} dx,$$

который, в силу условия $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$ сходится равномерно по λ . Следовательно, производная от функции $g(\lambda)$ существует и имеет место равенство (3). ■

Следствие 4 Пусть $f(x), xf(x), \dots, x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда функция $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ имеет производные до порядка p включительно, причем

$$g^{(k)}(\lambda) = F [(-ix)^k f(x)] (\lambda), \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

Следствие 5 Если $x^k f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $k \in \mathbb{N}$, тогда $F[f] \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Справедливо также “двойственное” утверждение.

Следствие 6 Если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, и $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то $|\lambda|^k F[f] \in L_1(\mathbb{R})$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое число $C_k > 0$, что

$$|F[f](\lambda)| \leq \frac{C_k}{1 + |\lambda|^k}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Лекция 17 (15 мая 2020)

Продолжаем изучение преобразование Фурье комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Мы определим преобразование Фурье функций из $L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

$$F[u](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u(x) dx \quad (1)$$

Мы будем также использовать другое обозначение, которое широко применяется:

$$\tilde{u}(\lambda) := F[u](\lambda).$$

§1 Преобразование Фурье в пространстве Шварца

Рассмотрим более узкий класс функций - пространство Шварца S . Это пространство состоит из бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со своими производными быстро стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Определение 1 Комплекснозначная функция $u(x) \in S \Leftrightarrow u(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и для любых $k, n \in \mathbb{Z}_+$ $\exists M_{k,n}$:

$$\left| \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right| \leq \frac{M_{k,n}}{(1+|x|)^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

Примеры функций из пространства Шварца: $\exp(-x^2)$, $P_m(x) \exp(Q_{2l})(x)$, где $P_m(x)$ и $Q_{2l}(x)$ - это полиномы степени m и $2l$, причем старший коэффициент Q_{2l} отрицателен.

Утверждение 1 Если $u \in S$, то $\frac{d^k u}{dx^k} \in S, \forall k \in \mathbb{Z}_+$. Если $P_m(x)$ - полином степени m , то $P_m(x)u(x) \in S$.

Очевидно, следует из определения. Поскольку $|e^{-i\lambda x}| = 1$, то интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно на $\lambda \in \mathbb{R}$, и его можно дифференцировать по λ любое число раз:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-i\lambda x} dx, \quad \frac{d^k \tilde{u}}{d\lambda^k} = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k e^{-i\lambda x} dx.$$

Эти интегралы равномерно и абсолютно сходятся при $u \in S$.

Обозначим через D оператор однократного дифференцирования по x и по λ :

$$D_x u(x) = \frac{du}{dx}, \quad D_\lambda \tilde{u}(\lambda) = \frac{d\tilde{u}}{d\lambda}.$$

Пусть $P(z)$ - полином с комплексными коэффициентами, тогда $P(D)$ - это дифференциальный оператор, т.е.

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + z_1 \cdot z + a_0, \text{ тогда} \\ P(D) &= a_n \cdot D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + \dots + z_1 \cdot D + a_0, \text{ т.е.} \\ P(D)u &= a_n \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n u + a_{n-1} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u + \dots + z_1 \cdot \frac{d}{dx} u + a_0 \cdot u \end{aligned}$$

При каждом дифференцировании интеграла (1) по λ подынтегральная функция умножается на $(-ix)$. Поэтому для $P(D)$ получаем следующее равенство:

$$P(D_\lambda) \tilde{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P(-ix)u(x)e^{-i\lambda x} dx. \quad (3)$$

Используя также обозначение F , получаем

$$P(D) F[u] = F[P(-ix)u], \quad P(D_\lambda) \tilde{u} = P_x(\widetilde{-ix})u. \quad (4)$$

Рассмотрим преобразование Фурье от $\frac{du}{dx}$:

$$F\left[\frac{du}{dx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)u(x)e^{-i\lambda x} dx = (i\lambda)F[u].$$

Здесь мы проинтегрировали по частям и воспользовались убыванием функции $u(x)$ к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Следовательно:

$$F[P(D_x)u] = P(i\lambda)F[u], \quad \widetilde{P(D)}u = P(i\lambda)\tilde{u} \quad (5)$$

Теорема 1 Преобразование Фурье переводит функции из класса S в себя.

Доказательство. Заметим, что функции из класса S принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, поэтому

$$|\tilde{u}(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Из (3) следует, что $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}_\lambda^1)$.

Как мы установили, производная функции из класса Шварца также принадлежит этому классу. Значит, в левой части (5) стоит преобразование Фурье функции из S .

Рассмотрим полином $P(z) = (1 + z^{4n})$. Из формулы (5) следует, что

$$(1 + \lambda^{4n})|F[u](\lambda)| \leq |F[(1 + D_x^{4n})u](\lambda)| \leq M.$$

Поэтому, преобразование Фурье от функции $u \in S$ стремится к нулю быстрее любой степени λ .

Из формулы (4) следует, что производная преобразования Фурье является преобразованием Фурье от функции из S , т.е. тоже стремится к нулю быстрее любой степени λ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. ■

Найдем отображение, обратное к преобразованию Фурье в пространстве Шварца. Наряду с $F[f]$ рассмотрим следующее линейное отображение:

$$G[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\lambda x} dx,$$

которое, как и преобразование Фурье, корректно определено на пространстве суммируемых функций (и, тем более, на пространстве Шварца). Легко видеть, что

$$G[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi} F[f](-\lambda),$$

Преобразование $G[f]$ обладает всеми теми же свойствами, что и преобразование Фурье. Кроме того, из формулы обращения для преобразования Фурье следует следующая теорема, которую мы уже доказывали для более широкого чем S класса функций.

Теорема 2 (Об обращении преобразования Фурье) Если $u \in S$, то $G \circ F[u] = u$, т.е. $G = F^{-1}$ на S . Подробнее, если $u(x) \in S$, $\tilde{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-i\lambda x} dx$, тогда

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (6)$$

Доказательство. Действительно, если $u \in S$, то функция u удовлетворяет условию Дини, причем интеграл справа в (6) сходится абсолютно и равномерно по $x \in \mathbb{R}^1$. Поэтому применима формула обращения преобразования Фурье. ■

§2 Преобразование Фурье в \mathbb{R}^n

Преобразование Фурье легко обобщается на функции нескольких переменных. Пусть $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция, интегрируемая по всему n -мерному пространству \mathbb{R}^n . Её преобразованием Фурье называется функция

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\lambda) &= \tilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot e^{-i(\lambda, x)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot e^{-i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned}$$

Этот n -кратный интеграл, заведомо существующий, поскольку $u(x_1, \dots, x_n)$ интегрируемая, можно записать в виде следующего повторного интеграла (здесь применяется теорема Фубини):

$$\tilde{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-ix_1 \lambda_1} dx_1 \right\} e^{-ix_2 \lambda_2} dx_2 \dots \right\} e^{-ix_n \lambda_n} dx_n. \quad (7)$$

Иначе говоря, можно перейти от функции n -переменных к её преобразованию Фурье, последовательно выполняя преобразования по каждой из переменных в отдельности (в

любом порядке). Обращая последовательно каждую из n операций в правой части (7), получим формулу:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) e^{ix_n \lambda_n} d\lambda_n \right\} e^{ix_{n-1} \lambda_{n-1}} d\lambda_{n-1} \dots \right\} e^{ix_1 \lambda_1} d\lambda_1.$$

Которую можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) e^{i(x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + \dots + x_n \lambda_n)} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(\lambda) e^{i\langle x, \lambda \rangle} d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Однако, функция $\tilde{u}(\lambda)$ не обязана быть суммируемой по всему \mathbb{R}^n . Поэтому необходимо указать, в каком смысле понимается этот интеграл и условия на функцию $f(x_1, \dots, x_n)$.

Теорема 3 Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, интегрируема по \mathbb{R}^n и удовлетворяет в точке x условию Дини: существует такое число $\delta > 0$, что функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{|z|}$ суммируема по z в шаре $|z| \leq \delta$, т.е.

$$\int_{|z|} \frac{|f(x+z) - f(x)|}{|z|} dz < \infty,$$

Тогда формула обращения (8) справедлива и её надо понимать в смысле:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ N_2 \rightarrow \infty \\ \dots \\ N_n \rightarrow \infty}} \int_{-N_1}^{N_1} \int_{-N_2}^{N_2} \dots \int_{-N_n}^{N_n} \tilde{u}(\lambda) e^{i\langle \lambda, x \rangle} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n. \quad (9)$$

Для доказательства применяется теорема Фубини и теорема 1 из Лекции 15.

Аналогично пространству Шварца S в \mathbb{R}^1 вводится пространство Шварца в \mathbb{R}^n , которое обозначается $S(\mathbb{R}^n)$. Это пространство состоит из функций $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, у которых все их частные производные $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$) стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|x|$:

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq \frac{C_{\alpha, k}}{1 + |x|^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Следствие 7 Если $u \in S(\mathbb{R}^n)$, то $\tilde{u} \in S(\mathbb{R}_\lambda^n)$, $\tilde{u}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\langle x, \lambda \rangle} dx$, при этом

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}_\lambda^n} \tilde{u}(\lambda) e^{i\langle x, \lambda \rangle} d\lambda,$$

и этот интеграл сходится абсолютно и равномерно в \mathbb{R}_λ^n .

Лекция 18 (22 мая 2020)

Применение преобразования Фурье

Преобразование Фурье, как и ряд Фурье, помогает получать решения для многих уравнений с частными производными. Основой применения служит то обстоятельство, что оператор дифференцирования переходит после преобразования Фурье в более простой оператор умножения на независимую переменную.

§1 Решение уравнения теплопроводности на всей оси

Мы будем решать следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (2)$$

Ищем решение $u = u(x, t)$, гладкости C^2 . Начнём с наводящих соображений. Найдем сперва частные решения методом разделения переменных. Ищем ограниченное решение в виде:

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Подставляем в уравнение (1) и, разделяя переменные, находим уравнения:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2,$$

где μ^2 – некоторая константа. Как мы видели раньше, случай $+\mu^2$ не годится, т.к. приводит к неограниченным решениям уравнения для x . Получаем уравнения:

$$T'(t) + a^2 \mu^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \mu^2 X(x) = 0.$$

Решаем первое уравнение: $T(t) = C \cdot e^{-a^2 \mu^2 t}$. А решение второго уравнения запишем в виде:

$$X(x) = A(\mu) \cdot e^{i\mu x} \text{ (годится любое вещественное число } \mu \text{)}.$$

Получаем ограниченное частное решение (1) в виде:

$$u_\mu(x, t) = A(\mu) \cdot e^{-a^2 \mu^2 t + i\mu x}.$$

Здесь $\mu \in \mathbb{R}$. Мы можем складывать также решения с разными μ и $A(\mu)$. Более того, можно также интегрировать по параметру μ . При этом будут снова получаться решения уравнения (1):

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu) e^{-a^2 \mu^2 t + i\mu x} d\mu.$$

Эти решения зависят только от функции $A(\mu)$. Какие $A(\mu)$ выбрать? Необходимо соблюдать начальное условие при $t = 0$, т.е.

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu) \cdot e^{i\mu x} d\mu.$$

Применяем преобразование Фурье:

$$A(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\mu x} dx \quad (\lambda = \mu)$$

Получим формально формулу для решения задачи (1), (2). Теперь сделаем это более строго и выпишем более простую формулу для решения.

Будем предполагать сначала, что $u(x, t) \in C^\infty$, и более того, при каждом t функция $u(x, t) \in S$ (пространство Шварца) равномерна по t на каждом отрезке $[0, T]$ (это означает, что константа $M_{k,n}$ в формуле оценки

$$\left| \frac{d^k u}{dx^k} \right| \leq M_{k,n} \cdot (1 + |x|)^{-n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

не зависит от $t \in [0, T]$ (но может зависеть от T). Сделаем преобразование Фурье обеих частей уравнения (1). Получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(\lambda, t) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} dx &= (i\lambda)^2 \cdot \tilde{u}(\lambda, t) = -\lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t). \end{aligned}$$

Получаем следующие ОДУ, в котором число λ служит фиксированным параметром:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\lambda, t) = -\lambda^2 a^2 \tilde{u}(\lambda, t).$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{u}(\lambda, 0) \cdot e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Теперь воспользуемся формулой обращения преобразования Фурье:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - a^2 \lambda^2 t} \tilde{u}(\lambda, 0) d\lambda.$$

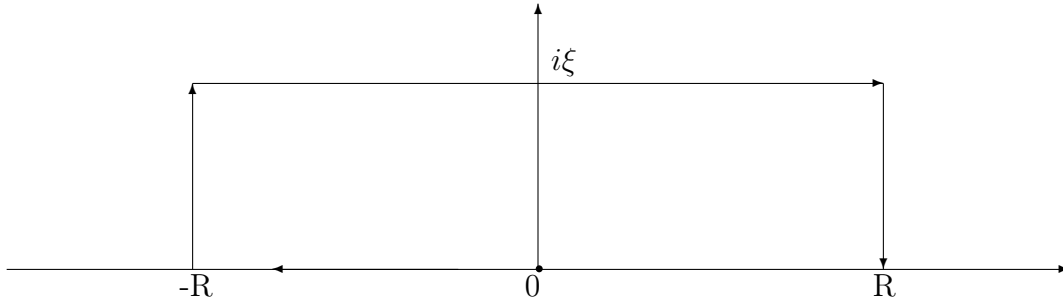
Напомним, что

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\lambda, 0) &= \tilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - a^2 \lambda^2 t^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-i\lambda y} dy \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-y)} d\lambda dy.\end{aligned}$$

Замена порядка интегрирования законна, т.к. функция $\varphi \in S$, а пространство S состоит из быстро убывающих функций. Вычислим второй интеграл явно:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-y)} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t (\lambda - i \frac{x-y}{2a^2 t})^2 - \frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} d\lambda = e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t z^2} dz = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\end{aligned}$$

Мы делали замену $\lambda - i \frac{x-y}{2a^2 t} = z$ и воспользовались теоремой из ТФКП, об интеграле по замкнутому контуру.



Здесь $\xi = \frac{x-y}{2a^2 t}$. Подынтегральная функция голоморфна на плоскости, интегралы по отрезкам $z = [R, R + i\xi]$ и $[-R, -R + i\xi]$ стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Потом сделали замену $a\sqrt{t}z = s$ и воспользовались интегралом Пуассона: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$.

Мы получили формулу Пуассона для решения задачи (1)-(2):

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) \varphi(y) dy, \quad \text{где } G(x, y, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}. \quad (3)$$

Формула (3) получена при очень жестких условиях на функцию $\varphi(x)$ и решение $u(x, t)$, а именно принадлежность этих функций пространству Шварца. Однако, как легко видеть, эта формула имеет смысл для значительно более широкого класса функций φ . Это позволяет решить задачу Коши (1), (2) лишь при условии, что начальная функция непрерывна и ограничена.

§2 Теорема существования решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Напомним, что решением задачи Коши (1)-(2) называется функция $u(x, t)$, у которой $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \in C(x \in \mathbb{R}, t > 0)$ и $u \in C(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$, причем $u(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная непрерывная функция при $x \in \mathbb{R}$. Тогда функция, определенная формулой (3), бесконечно дифференцируема по x и по t при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$, удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$ и начальному условию (2) при $t = 0$.

Доказательство. Для любой точки (x_0, t_0) , $x_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$, найдется её окрестность, где $t \geq \gamma > 0$ и $|x| < m$. Для точек (x, t) из этой окрестности интеграл (3) сходится абсолютно и равномерно. Более того, его можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз по x и t .

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что функция $G(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (1). Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= -\frac{1}{2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^2t^2}G, & \frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{x-y}{2a^2t}G \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2a^2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^4t^2}G, & \frac{\partial G}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Следовательно, функция (3) так же удовлетворяет этому уравнению. Отметим, что $G(x, y, t) > 0$ и выполнено тождество:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) dy = 1 \quad (\text{Проверяется непосредственно заменой}). \quad (4)$$

Осталось проверить, что функция (3) удовлетворяет начальному условию (2). Покажем, что $u(x, t)$ непрерывна при $t = 0$ и $u(x, t) - \varphi(z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow z, t \rightarrow 0+$. Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned} u(x, t) - \varphi(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) \varphi(y) dy - \varphi(z) \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) [\varphi(y) - \varphi(z)] dy. \end{aligned}$$

Пусть $|\varphi(x)| \leq M$ (по условию). Оценим

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \varphi(z)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) [\varphi(y) - \varphi(z)] dy \right| \leq \left| \int_{|y-z| < \delta} G(x, y, t) [\varphi(y) - \varphi(z)] dy \right| + \\ &+ \left| \int_{|y-z| \geq \delta} G(x, y, t) [\varphi(y) - \varphi(z)] dy \right|. \end{aligned}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что $|\varphi(y) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|y - z| < \delta$ (напомним, что функция φ непрерывна в точке z). Воспользуемся в первом слагаемом положительностью функции G и равенством (4). Тогда:

$$|u(x, t) - \varphi(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{|y-z| \geq \delta} 2M \cdot G(x, y, t) dy.$$

Оценим последний интеграл. Если $|x - z| < \frac{\delta}{2}$ и $|y - z| \geq \delta$, то $|y - x| \geq \frac{\delta}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{|y-z| \geq \delta} 2M \cdot G(x, y, t) dy &\leq 2M \int_{|y-x| \geq \delta/2} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) dy = \\ &= \frac{2M}{a\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4a^2t}\right) ds = M_1 \int_{\frac{\delta}{4a\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma. \end{aligned}$$

Мы сделали сначала замену переменной $x - y = s$, а в конце еще замену $\frac{s}{2a\sqrt{t}} = \sigma$. Последнее выражение с интегралом можно сделать меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $t < \mu$, если выбрать число μ достаточно малым. Следовательно,

$$|u(x, t) - \varphi(z)| \leq \varepsilon \quad \text{если } |x - z| < \frac{\delta}{2} \text{ и } t < \mu.$$

Значит, функция $u(x, t)$ непрерывна в точке $(z, 0)$ и $u(z, 0) = \varphi(z)$.

■

Лекция 19 (29 мая 2020)

§1. Решение уравнения теплопроводности в \mathbb{R}^n

На прошлой лекции мы построили решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в \mathbb{R}^1 при помощи преобразования Фурье. Аналогично строится решение этой задачи в многомерном случае, когда $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа.

Применяя преобразование Фурье к обеим частям уравнения (1) получаем:

$$\frac{\partial \tilde{u}(\lambda, t)}{\partial t} = -(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) a^2 \tilde{u}(\lambda, t).$$

Откуда

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{u}(\lambda, 0) \cdot e^{-|\lambda|^2 a^2 t},$$

где $\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda)$ – преобразование Фурье $\varphi(x)$. Применим n -мерную формулу обращения преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \lambda, x \rangle} \tilde{u}(\lambda, t) d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \lambda, x \rangle - a^2 |\lambda|^2 t} \tilde{\varphi}(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \lambda, x \rangle - a^2 |\lambda|^2 t} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot e^{-i\langle \lambda, y \rangle} dy \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \lambda, x-y \rangle - a^2 |\lambda|^2 t} d\lambda \right] dy. \end{aligned}$$

По теореме Фубини можно менять порядок интегрирования, так как $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Получаем формулу:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot G(x - y, t) dy, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} G(x - y, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \lambda, x-y \rangle - a^2 |\lambda|^2 t} d\lambda = \quad [\text{переменные разделяются}] \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_k (x_k - y_k) - a^2 \lambda_k^2 t} d\lambda_k = \quad [\text{случай } n = 1 \text{ из прошлой лекции}] \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{|x_k - y_k|^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

Формула (2) называется формулой Пуассона в \mathbb{R}^n . Как и в одномерном случае, легко убедиться в том, что формула (2) задает решение задачи (1), если известно, что $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ и $|\varphi(x)| \leq M$: это проверяется непосредственно дифференцированием, а начальные условия – как в одномерном случае.

§2. Решение уравнения колебаний бесконечной струны с помощью преобразования Фурье

Теперь построим решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Предположим, что $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^1)$ и $u(x, t) \in S(\mathbb{R}^1)$ равномерно по $t \in [0, T]$, причем $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$. Выполним преобразование Фурье обеих частей уравнения (1):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\lambda, t)}{\partial t^2} = -a^2 \lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t), \quad (3)$$

где

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i(x, \lambda)} dx.$$

Общее решения (3) запишем в виде:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = A(\lambda) \cos a\lambda t + B(\lambda) \sin a\lambda t. \quad (4)$$

Начальные условия:

$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\lambda, 0) = \tilde{\psi}(\lambda).$$

Значит,

$$A(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda), \quad B(\lambda) = \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda}.$$

Покажем, что $B(\lambda) \in S(\mathbb{R})$. Для этого установим следующее утверждение:

Утверждение 1 Пусть $z(\lambda)$ – некая функция. Тогда

$$\frac{z(\lambda)}{\lambda} \in S(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} z(\lambda) \in S(\mathbb{R}), \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Если функция $z(\lambda)$ является аналитической в точке $\lambda = 0$, то это очевидно. Слушателям предлагается убедиться в том, что это так и в случае, когда функция $z(\lambda)$ не является аналитической (такие функции имеются в пространстве S и их, в некотором смысле, подавляющее большинство). ■

Ввиду наложенных на ψ ограничений, функция $\tilde{\psi}$ удовлетворяет условиям этого утверждения. Действительно,

$$\tilde{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0,$$

поэтому $B(\lambda) \in S(\mathbb{R})$.

Подставим в (4) выражения для $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Получим:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda) \cos a\lambda t + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda} \sin a\lambda t.$$

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Подставив в выражение для \tilde{u} , получаем:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = F(\lambda)e^{ia\lambda t} + G(\lambda)e^{-ia\lambda t}, \quad (5)$$

где

$$F(\lambda) = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{2} + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{2a\lambda i}, \quad G(\lambda) = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{2} - \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{2a\lambda i}.$$

Заметим, что $F, G \in S(\mathbb{R})$ (как линейные комбинации функций A и B из $S(\mathbb{R})$). Тогда F и G – преобразования Фурье некоторых функций $f \in S(\mathbb{R})$ и $g \in S(\mathbb{R})$, причем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{f}(\lambda)e^{ia\lambda t} + \tilde{g}(\lambda)e^{-ia\lambda t}.$$

Покажем, что в правой части этого равенства стоит преобразование Фурье функции $f(x + at) + g(x - at)$. Действительно, для любого $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{f(x + \tau)} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \tau)e^{-i\lambda x} dx = e^{i\lambda\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \tau)e^{-i\lambda(x+\tau)} dx = \\ &= e^{i\lambda\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\lambda y} dy = e^{i\lambda\tau} \tilde{f}(\lambda). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\widetilde{f(x + at)} = e^{i\lambda at} \tilde{f}(\lambda), \quad \widetilde{g(x - at)} = e^{-i\lambda at} \tilde{g}(\lambda).$$

Поэтому,

$$\tilde{u}(x, t) = \widetilde{f(x + at) + g(x - at)}.$$

Значит,

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at). \quad (6)$$

Найдем выражения функций f и g через начальные функции φ и ψ . Воспользуемся начальными условиями при $t = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \varphi(x), \\ f'(x) - g'(x) &= \frac{\psi(x)}{a}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее равенство:

$$f(x) - g(x) = C + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(y) dy.$$

С учетом первого равенства получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\varphi(x) + C + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(y) dy \right), \\ g(x) &= \frac{1}{2} \left(\varphi(x) - C - \frac{1}{a} \int_0^x \psi(y) dy \right). \end{aligned}$$

Мы нашли f и g . Они определены с точностью до прибавления константы. Найдем вид решения:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. \quad (7)$$

Эта формула называется формулой Даламбера. Впервые ее вывел Эйлер, но без использования преобразования Фурье, которое появилось позже. А Даламбер, на самом деле, нашел формулу (6) для любого решения уравнения (1). Точнее, им была доказана следующая

Теорема 2 (Даламбер) Пусть D – выпуклая область в \mathbb{R}^2 и функция $u(x, t) \in C^2(D)$, $(x, t) \in D$, является решением уравнения (1) в области D . Тогда найдутся такие две функции $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, что $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$.

Доказательство. Сделаем замену переменных $\xi = x + at, \eta = x - at$ и рассмотрим функцию $v(\xi, \eta)$, которая получается из $u(x, t)$ после этой замены, т.е.

$$u(x, t) = v(x + at, x - at).$$

Очевидно, что $v(\xi, \eta) \in C^2(G)$, где (выпуклая) область G получается из D при сделанной замене координат. Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $v(\xi, \eta)$ в области G . Имеем

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi + v_\eta, & u_{xx} &= v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2v_{\xi\eta}, \\ u_t &= av_\xi - av_\eta, & u_{tt} &= a^2v_{\xi\xi} + a^2v_{\eta\eta} - 2a^2v_{\xi\eta}, \\ u_{tt} - a^2u_{xx} &= -4a^2v_{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем уравнение для функции $v(\xi, \eta)$

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad \forall(\xi, \eta) \in G.$$

Интегрируем это уравнение два раза, используя выпуклость области G :

$$v_{\xi} = f_1(\xi) \quad \Rightarrow \quad v(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} f_1(s) ds + g(\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

Откуда получаем, что $u(x, t) = f(x + at) + f(x - at)$.

■

Мы вывели формулу (7) для решения задачи Коши (1), (2) при довольно жестких ограничениях на φ и ψ . Однако, как несложно видеть, выполнена следующая теорема.

Теорема 3 (формула Даламбера) Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда формула (7) задает функцию $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, которая является решением задачи Коши (1), (2).

Доказательство. Достаточно продифференцировать формулу (6) или (7) (отметим, что $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ в силу условий наложенных на φ и ψ):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(x + at) + g(x - at)) = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x + at) + g(x - at)) = f''(x + at) + g''(x - at).$$

Начальные условия проверяются непосредственно:

$$u(x, 0) = \frac{\varphi(x) + \varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_x^x \psi(y) dy = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \frac{a\varphi(x) - a\varphi(x)}{2} + \frac{a}{2a} (\psi(x) + \psi(x)) = \psi(x).$$

■

Формула Даламбера говорит о том, что решение уравнения струны есть сумма двух бегущих волн. Волна $f(x + at)$ бежит влево со скоростью a , а волна $g(x - at)$ бежит вправо со скоростью a .

Лекция 20 (5 июня 2020)

§1. Уравнения с частными производными, корректные по Петровскому

Продолжим применение преобразования Фурье. Будем решать уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами в пространстве \mathbb{R}^n . Будем обобщать методы, которые использовались при решении уравнения теплопроводности.

Обозначим оператор $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Пусть $P(z) = P(z_1, \dots, z_n)$ – многочлен относительно переменных z_1, \dots, z_n , то есть

$$P(z) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha \cdot z^\alpha, \quad \text{где } a_\alpha \in \mathbb{C}, \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $P(D)$, где $D = (D_1, \dots, D_n)$:

$$P(D) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha \cdot D^\alpha, \quad P(D)u = \sum_\alpha a_\alpha \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Многочлен $P(z)$ принято называть символом дифференциального оператора $P(D)$. Число m называется порядком оператора $P(D)$.

Пример $P(z) = z_1^2 + 5iz_2z_3 + \frac{2}{7}z_4$, $n = 4$, $m = 2$. Тогда

$$P(D) = D_1^2 + 5iD_2D_3 + \frac{2}{7}D_4 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 5i \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{2}{7} \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Этот оператор имеет порядок $m = 2$.

Уравнение теплопроводности в \mathbb{R}^n можно записать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u, \quad \text{где } P(D) = a^2 \sum_{k=1}^n D_k^2.$$

Рассмотрим теперь задачу Коши для общего уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $P(D)$ – некоторый дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка m .

Определение 1 Уравнение (1) называется корректным по Петровскому, если существует константа $M \in \mathbb{R}$ такая, что для любого вещественного $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} P(i\lambda) \leq M. \quad (3)$$

Пусть $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ – функция из пространства Шварца в \mathbb{R}^n . Покажем, что в этом случае для корректных по Петровскому уравнений решения можно построить с помощью преобразования Фурье.

Положим

$$\tilde{u}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\langle x, \lambda \rangle} dx, \quad u \in S.$$

По формуле обращения:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(\lambda) e^{i\langle x, \lambda \rangle} d\lambda.$$

Как мы знаем, преобразование Фурье производных получается по формуле:

$$\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) e^{-i\langle x, \lambda \rangle} dx = (i\lambda_j) \cdot \tilde{u}(\lambda),$$

$$\widetilde{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}}(\lambda) = (i\lambda_j)(i\lambda_k) \cdot \tilde{u}(\lambda),$$

$$\widetilde{P(D)u}(\lambda) = P(i\lambda) \cdot \tilde{u}(\lambda).$$

Умножим обе части уравнения (1) на $e^{-i\langle x, \lambda \rangle}$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}^n$. Получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\lambda, t) = P(i\lambda) \tilde{u}(\lambda, t), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{R}^n$ – произвольный параметр. Поскольку $\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda)$, то решение этого уравнения имеет вид:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda) e^{P(i\lambda)t},$$

и, следовательно, применяя формулу обращения, получаем формулу для решения задачи Коши (1), (2):

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{P(i\lambda)t + i\langle x, \lambda \rangle} d\lambda \quad \text{при } t \geq 0. \quad (5)$$

Заметим, что в силу условия Петровского (3) выполнено

$$|e^{P(i\lambda)t + i\langle x, \lambda \rangle}| = e^{\operatorname{Re} P(i\lambda)t} \leq e^{Mt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Поэтому интеграл (5) сходится абсолютно и равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, так как $\tilde{\varphi} \in S$. Более того, этот интеграл можно сколько угодно раз дифференцировать по x и по t и, в частности,

$$P(D)u = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} P(i\lambda) \tilde{\varphi}(\lambda) e^{P(i\lambda)t + i\langle x, \lambda \rangle} d\lambda,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} P(i\lambda) \tilde{\varphi}(\lambda) e^{P(i\lambda)t + i\langle x, \lambda \rangle} d\lambda.$$

Значит,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

и, очевидно, $u(x, 0) = \varphi(x)$, так как $\varphi \in S$. Следовательно, формула (5) задает решение задачи (1), (2) при $\varphi \in S$.

Рассмотрим некоторые примеры:

Пример 1 (Уравнение теплопроводности) Для уравнения теплопроводности

$$P(D) = a^2(D_1^2 + \dots + D_n^2),$$

$$P(i\lambda) = -a^2(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) = -a^2 \cdot |\lambda|^2.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} P(i\lambda) \leq 0$, то есть условие Петровского выполнено при $M = 0$. Мы уже решали это уравнение и получили формулу Пуассона.

Пример 2 (Уравнение Шредингера)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ia^2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Это основное уравнение в квантовой механике.

$$P(i\lambda) = ia^2 \left((i\lambda_1)^2 + \dots + (i\lambda_n)^2 \right) = -ia^2 |\lambda|^2 \Rightarrow \operatorname{Re} P(i\lambda) = 0 \leq 0.$$

Значит, уравнение Шредингера является корректным по Петровскому.

Найдем формулу для решение уравнения Шредингера при $n = 1$.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda x - ia^2 \lambda^2 t} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - ia^2 \lambda^2 t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda y} \varphi(y) dy \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-y) - ia^2 \lambda^2 t} d\lambda dy \end{aligned}$$

Внутренний интеграл считаем явно:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(a^2 \lambda^2 t - \lambda(x-y))} d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia^2 t \left(\lambda - \frac{x-y}{2a^2 t} \right) + i \frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} d\lambda \quad \left[\text{замена } \lambda - \frac{x-y}{2a^2 t} = z \right] \\ &= e^{i \frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia^2 t z^2} dz = \left[\text{замена } a\sqrt{t}z = \xi; \quad dz = \frac{d\xi}{a\sqrt{t}} \right] \\ &= e^{i \frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi^2} d\xi = \left[\text{интеграл Френеля: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i \frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

Получили формулу для решения уравнения Шредингера (6) при $n = 1$:

$$u(x, t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{i\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} dy.$$

Тогда при $n \in \mathbb{N}$, очевидно, справедлива формулу

$$u(x, t) = \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{i\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} dy.$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что при $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ эта формула действительно задает решение уравнения Шредингера (6) с начальным условием $\varphi(x)$.

Пример 3 (Обратное уравнение теплопроводности)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

$$P(D) = -a^2 D, \quad P(i\lambda) = a^2 |\lambda|^2.$$

Условие (3) не выполнено. Это уравнение не является корректным по Петровскому.

Лекция 21 (12 июня 2020)

§1. Свертка функций и преобразование Фурье

Пусть $f_1(x), f_2(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Функция

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi$$

называется сверткой функций f_1 и f_2 .

Функция $f(x)$ определена при почти всех x и принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Действительно, двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi dx$$

существует, поскольку существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\xi)| \cdot |f_2(\eta)| d\xi d\eta \text{ (теорема Фубини).}$$

Следовательно, существует и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi.$$

Функция f обозначается $f_1 * f_2$.

Вычислим преобразование Фурье свертки двух функций из $L_1(\mathbb{R})$. Применяя теорему Фубини и делая замену $x - \xi = \eta$, находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \right] e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - \xi) e^{-i\lambda x} dx \right] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\eta x} e^{-i\xi x} d\eta \right] d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\eta x} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = F[f_1] \cdot F[f_2]. \end{aligned}$$

Следовательно, $F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]$. В других принятых обозначениях $\widetilde{f_1 * f_2} = \widetilde{f_1} \cdot \widetilde{f_2}$.

Легко проверяется следующее

Утверждение 1 Если $f_1, f_2 \in S$, то $f_1 * f_2 \in S$.

В качестве применения полученных соотношений еще раз выведем формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в \mathbb{R} .

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Пусть $u(\cdot, t) \in S$, $\varphi \in S$. Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения (1) и получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{u}(\lambda, t) &= -a^2 \lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t), \quad \tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda), \\ \tilde{u}(\lambda, t) &= e^{-a^2 \lambda^2 t} \tilde{\varphi}(\lambda). \end{aligned}$$

В лекции 16 мы нашли преобразование Фурье функции e^{-rx^2} :

$$F \left[e^{-rx^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{r}} e^{-\frac{\lambda^2}{4r}}.$$

Положим $r = (4a^2t)^{-1}$ и получим

$$F[G] = F \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \right] = e^{-a^2\lambda^2t},$$

где $G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$. Следовательно,

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{G}(\lambda, t) \cdot \tilde{\varphi}(\lambda) = G(\cdot, t) * \varphi(\cdot),$$

т.е.

$$u(x, t) = G(\cdot, t) * \varphi(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x - \xi) d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Получили формулу Пуассона.

§2. Преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$

Известно, что преобразование Фурье функции из $L_1(\mathbb{R})$ не обязательно принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Вместе с тем, как было установлено, преобразование Фурье отображает пространство Шварца S в себя. Аналогичным свойством обладает пространство $L_2(\mathbb{R})$, однако здесь нужно немного иначе определить преобразование Фурье.

Напомним некоторые результаты из теории рядов Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$, где имеется полная ортогональная система $\{e^{inx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Каждой функции $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ поставим в соответствие последовательность ее коэффициентов Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если функция $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, то совокупность ее коэффициентов Фурье определяет отображение евклидова пространства $L_2(-\pi, \pi)$ в евклидово пространство ℓ_2 , причем это отображение линейно и сохраняет скалярное произведение и норму (равенство Парсеваля):

$$2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Рассмотрим теперь преобразование Фурье F для функций, заданной на всей оси. Вопрос: можно ли F трактовать как отображение в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Основная трудность состоит в том, что функции из $L_2(\mathbb{R})$ не обязаны принадлежать $L_1(\mathbb{R})$, т.е. мы не можем воспользоваться введенным ранее определением преобразования Фурье в $L_1(\mathbb{R})$. Однако, это можно сделать несколько иначе. При этом поможет следующая

Теорема 1 (Планшерель) Для всякой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ при любом $N \in \mathbb{N}$ интеграл

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^N f(x)e^{-i\lambda x} dx$$

представляет собой функцию от λ , принадлежащую $L_2(\mathbb{R})$. При $N \rightarrow \infty$, функции $g_N(\lambda)$ сходятся к некоторому пределу $g \in L_2(\mathbb{R})$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (2)$$

Функция $g(\lambda)$ называется преобразованием Фурье функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Если $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то построенная выше функция $g(\lambda)$ совпадает с обычным преобразованием Фурье функции $f(x)$. Равенство (2) называется тождеством Планшереля.

Доказательство. Идея доказательства заключается в том, что равенство (1) устанавливается сперва для функций из класса Шварца S , который всюду плотен в $L_2(\mathbb{R})$, а потом распространяется по непрерывности на все пространство $L_2(\mathbb{R})$.

1. Пусть $f_1, f_2 \in S$. Обозначим g_1 и g_2 их (обычные) преобразования Фурье. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda \right] \overline{f_2(x)} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)e^{-i\lambda x} dx} \right] d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)} d\lambda, \end{aligned}$$

причем изменение порядка интегрирования законно по теореме Фубини, поскольку функция $g_1(\lambda)\overline{f_2(x)}e^{-i\lambda x}$ абсолютно интегрируема на плоскости (λ, x) . Положим $f_1 = f_2 = f$, $g_1 = g_2 = g$ и получим (1) для любой функции $f \in S$.

2. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$ и обладает тем свойством, что она равна нулю вне некоторого конечного интервала $(-a, a)$. Такие функции называются финитными. Тогда, f интегрируема на интервале $(-a, a)$, т.е. $f \in L_2(-a, a)$, следовательно, $f \in L_1(\mathbb{R})$, и поэтому определено обычное преобразование Фурье

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx = \int_{-a}^a f(x)e^{-i\lambda x} dx.$$

Пусть теперь $\{f_n\}$ – последовательность функций из S , обращающихся в ноль вне интервала $(-a-1, a+1)$, сходящаяся по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ к f . Такую последовательность можно построить для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ (конструкцию мы опускаем). Поскольку f и f_n отличаются от нуля лишь на конечном интервале, последовательность $\{f_n\}$ сходится к f и по норме пространства $L_1(\mathbb{R})$. Поэтому последовательность $\{g_n(\lambda)\}$ сходится к $g(\lambda)$ равномерно на всей оси (см. утверждение 2, лекция 17). Кроме того, последовательность $\{g_n(\lambda)\}$ фундаментальна в $L_2(\mathbb{R})$. Действительно, $g_n - g_m \in S$, поэтому в силу уже доказанного в пространстве S тождества Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx,$$

т.е. $\{g_n(\lambda)\}$ фундаментальна в $L_2(\mathbb{R})$. Значит, эта последовательность сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к той же самой функции $g(\lambda)$, к которой сходится равномерно. Поэтому в равенстве

$$\|f_n\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|g_n\|_{L_2(\mathbb{R})}^2$$

можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, получаем, что равенство (2) справедливо для любой финитной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$. При этом, очевидно, что функция $g(\lambda) \in L_2(\mathbb{R})$.

3. Пусть, наконец, f – произвольная функция из $L_2(\mathbb{R})$. Положим

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } |x| \leq N, \\ 0, & \text{при } |x| > N. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\|f - f_N\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Функция $f_N(x)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Поэтому для нее существует преобразование Фурье (обычное), которое равно

$$g_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-N}^N f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Заметим, что функция $f_N - f_M$ является финитной, поэтому в силу пункта **2**, который мы уже доказали,

$$\|f_N - f_M\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|g_N - g_M\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

Значит, последовательность $\{g_N(\lambda)\}$ является фундаментальной в $L_2(\mathbb{R})$, т.е. она сходится к некоторому пределу, который мы обозначим через $g(\lambda)$. Тогда в равенстве

$$\|f_N\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|g_N\|_{L_2(\mathbb{R})}^2$$

можно перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$, откуда получаем равенство (2) для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$. Первая часть теоремы Планшереля доказана.

Если теперь $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то для этой функции существует обычное преобразование Фурье

$$\hat{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

При этом функции f_N сходятся к f в норме $L_1(\mathbb{R})$, а значит, их преобразования Фурье $g_N(\lambda)$ сходятся равномерно к $\hat{g}(\lambda)$. Но кроме того, мы установили, что последовательность $g_N(\lambda)$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к некоторому пределу g . Отсюда следует, что $\hat{g} = g$.

■

Следствие 8 Для любых функций $f_1, f_2 \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda) \overline{g_2(\lambda)} d\lambda.$$

Значит отображение $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F[f]$ сохраняет скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$.