Семинар 15

1. Присоединим к полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$ вещественный корень $5^{1/3}$. Опишите все мономорфизмы (над $\mathbb{Q}$) полученного поля в поле комплексных чисел.

2. Та же задача для поля разложения F над $\mathbb{Q}$ многочлена $X^3 - 5$. Доказать,что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C})$ является группой, изоморфной группе S_3.

3. Найдите группу Галуа $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$.

4. Докажите, что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}})$.

Следующие задачи – это стандартное доказательство теоремы о примитивном элементе для (сепарабельных) конечных расширений бесконечного поля.

5. Пусть K – бесконечное поле, $F = K(\alpha, \beta)$ – его конечное расширение, σ_i, $i = 1, 2 \ldots, m$, элементы множества $\mathrm{Hom}_K(F, \bar{F})$. Доказать, что в поле K существуют элементы A и B, удовлетворяющие конечному множеству неравенств $A(\sigma_i\alpha - \sigma_j\alpha) + B(\sigma_i\beta - \sigma_j\beta) \neq 0$, $i \neq j$.

6*. Положим $\gamma = A\alpha + B\beta$. Доказать,что $F = K(\gamma)$. (С: элементы $\sigma_i\gamma$, $i = 1, \ldots, m$, являются различными корнями минимального многочлена элемента γ над K (Почему?). Следовательно, степень расширения $K(\gamma)$ не меньше, чем m. С другой стороны, прямое следствие теоремы о продолжении гомоморфизмов (будет доказано на лекциях) говорит о том, что m равно степени поля F над K.

7. Доказать теорему о примитивном элементе для произвольного конечного (сепарабельного) расширения бесконечного поля.