К лекции 1-2

1

Глава 1

Классическая вероятностная модель

1.1. Определение вероятности. События

Классическая вероятностная модель используется для описания опытов с конечным числом взаимно исключающих возможных исходов. При этом предполагается, что исходы опыта случайны и равновероятны по тем или иным соображениям (практический опыт, симметричность исходов, невозможность отдать предпочтение одним исходам перед другими и т. п.). Такие ситуации часто возникают в различных играх: домино, лото, карточные игры, бросание игральных костей и т. д. При организации лотерей, отборе контрольной выборки из партии изделий равновероятность организуется специально.

Пусть результаты опыта описываются S взаимно исключающими исходами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_S$. Эти исходы называют также ***элементарными событиями***. Множество $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_S\}$ всех таких исходов называют ***множеством элементарных событий***.

Любое случайное событие A, связанное с данным опытом, может быть задано посредством перечисления всех элементарных событий, при которых оно происходит. Пусть, например, A — это выпадение четного числа очков при бросании игральной кости. Тогда A можно задать перечислением благоприятствующих ему элементарных событий: выпало либо 2 очка, либо 4 очка, либо 6 очков.

Событие Ω, состоящее из всех возможных исходов, называют ***достоверным***.

В дальнейшем будем обозначать $|A|$ число элементарных событий, входящих в A.

Если событию A благоприятствует K элементарных исходов, то вероятность $\mathrm{P}(A)$ события A в классической вероятностной модели определяется формулой

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{K}{S}. \tag{1.1}$$

При решении задач необходимо сначала описать множество элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_S\}$; найти число $S = |\Omega|$; найти число $K = |A|$ элементарных событий, благоприятствующих A, и воспользоваться формулой (1.1).

1.1 Брошено две одинаковых монеты. Найти вероятность того, что монеты выпали разными сторонами.

1.2 Брошены три монеты. Описать множество всех элементарных событий. Найти вероятности следующих событий:

1.3 Из двух претендентов E и L на ответственную должность три члена комиссии должны отобрать одного. Каждый член комиссии должен указать либо одного достойного, либо забраковать обоих. Претендент считается выбранным, если он был признан достойным хотя бы двумя членами комиссии. Найти вероятности событий:

$$A = \{\text{рекомендован } L\}, \quad B = \{\text{рекомендован } E\}.$$

1.4 Брошено две игральных кости. Описать множество элементарных событий. Найти вероятности следующих событий:

$$A = \{\text{выпало две “шестерки”}\},$$
$$B = \{\text{сумма выпавших очков не меньше } 11\},$$
$$C = \{\text{не выпала ни одна “шестерка”}\}.$$

Ответ: $\mathrm{P}(A) = 1/36$, $\mathrm{P}(B) = 3/36 = 1/12$, $\mathrm{P}(C) = 25/36$.

к лекции 1-2

1.2. Вероятность суммы событий

Событие $A+B$ называют ***суммой*** событий A и B, если $A+B$ происходит, когда происходит хотя бы одно из событий: A или B. Вероятность суммы $A+B$ равна сумме вероятностей A и B:

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B), \tag{1.2}$$

если события A и B ***несовместны***, т. е. A и B не могут произойти одновременно. В общем случае

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B),-\mathrm{P}(AB). \tag{1.3}$$

Здесь ***произведение*** событий AB — это событие, состоящее в том, что происходит и событие A, и событие B. Если A и B несовместны, то AB — невозможное событие. Тогда $\mathrm{P}(AB)=0$ и из (1.3) следует формула (1.2).

Если использовать задание случайных событий посредством перечисления благоприятствующих элементарных событий, то суммой событий $A+B$ нужно назвать событие, состоящее из элементарных событий, каждое из которых входит хотя бы в одно из событий A или B; произведение AB состоит из элементарных событий, входящих и в A, и в B.

Событие $\overline{A}$, противоположное событию A, состоит в том, что A не произошло. Формула

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\overline{A}) \tag{1.4}$$

полезна в тех случаях, когда вероятность события $\overline{A}$ вычислить проще, чем вероятность события A.

Если среди событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ любые два события несовместны, то

$$\mathrm{P}(A_1+\ldots+A_n)=\mathrm{P}(A_1)+\ldots+\mathrm{P}(A_n). \tag{1.5}$$

1.5 Брошены две игральные кости. Найти вероятность события $D=\{$выпала хотя бы одна «шестерка»$\}$.

1.6 В условиях задачи 1.3 найти вероятность события

$$C=\{\text{выбор не состоялся}\}.$$

Ответ: $\mathrm{P}(C)=\dfrac{13}{27}$.

К лекции 1-2

1.7 В ящике 10 одинаковых карточек, на которых по одной написаны цифры $0, 1, \ldots, 9$. Два раза с возвращением вынимается по одной карточке. Найти вероятности событий:

$A = \{$на вынутых карточках появились цифры $0, 0\}$,

$B = \{$на второй карточке появилась $9\}$,

$C = \{$ни на одной вынутой карточке не было $5\}$,

$D = \{$появилась хотя бы одна $1\}$.

Ответ: $\mathbf{P}(A) = 0{,}01$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}1$, $\mathbf{P}(C) = 0{,}81$, $\mathbf{P}(D) = 0{,}19$.

1.8 В телефонном номере три последние цифры стерлись. Считая, что все возможные значения стершихся цифр равновероятны, найти вероятности событий:

$A = \{$стерлись различные цифры$\}$,

$B = \{$стерлись одинаковые цифры$\}$,

$C = \{$среди стершихся цифр хотя бы две совпадают$\}$,

$D = \{$среди стершихся цифр хотя бы две различны$\}$.

Ответ Ответ $\mathbf{P}(A) = 10 \cdot 9 \cdot 8/10^3 = 0{,}72$, $\mathbf{P}(B) = 10/10^3 = 0{,}01$, $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(\overline{A}) = 0{,}28$, $\mathbf{P}(D) = 0{,}99$.

к лекции 1-2 5

1.3. Случайные величины

Довольно часто с исходами опыта $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_S\}$ связывают различные числовые характеристики: суммарное число очков при бросании нескольких игральных костей, число бракованных изделий в обследуемой выборке и т. д. Естественно эти числовые характеристики рассматривать как различные функции от элементарных событий. Принимаемые этими функциями значения зависят от исхода опыта.

Если число элементарных событий конечно, то любую функцию от элементарного события, определенную для каждого элементарного события, называют ***случайной величиной***.

Обычно случайные величины обозначают заглавными буквами $X = X(\omega)$. Среди S чисел $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, могут быть одинаковые. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ все различные значения функции $X(\omega)$. Очевидно, $n \leqslant S = |\Omega|$.

Можно найти вероятность события $\{X = x_k\}$, $k = 1, \ldots, n$. Событие $\{X = x_k\}$ состоит из всех тех ω из $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_S\}$, для которых $X(\omega) = x_k$. Это можно записать так:

$$\{X = x_k\} = \{\omega : X(\omega) = x_k\}.$$

Набор вероятностей

$$\mathrm{P}\{X = x_k\} = \frac{\big|\{X = x_k\}\big|}{|\Omega|}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{1.6}$$

называют ***законом распределения*** случайной величины X.

[1.9] В лотерее имеется 10 билетов, из которых один выигрышный. Размер выигрыша 10 ден. ед.; стоимость билета 1 ден. ед. Найти закон распределения случайной величины X, равной чистому выигрышу участника лотереи, который вытаскивает билет первым.

1.10 Из ящика с 10 одинаковыми карточками, на которых по одной написаны цифры $0, 1, \ldots, 9$, два раза с возвращением вынимают по одной карточке. Введем случайные величины: X_1 — цифра на первый карточке, X_2 — цифра на второй карточке; X — сумма цифр на вынутых карточках (т. е. $X = X_1 + X_2$). Указать все возможные значения величин X_1, X_2, X; найти вероятности, соответствующие этим значениям. Найти вероятность события $\{X \leqslant 2\}$.

к лекции 1-2

1.11 В опыте, описанном в задаче (1.10) введем случайную величину Z, равную числу четных цифр на вынутых карточках. Величины Z_1 и Z_2 определим равенствами: $Z_1 = 1$, если на первый карточке четная цифра, и $Z_1 = 0$ — в противном случае; $Z_2 = 1$, если на второй карточке четная цифра, и $Z_2 = 0$ — в противном случае. Указать возможные значения случайных величин Z, Z_1, Z_2. Проверить, что $Z = Z_1 + Z_2$. Найти законы распределения Z_1, Z_2, Z.

Ответ: $\mathbf{P}\{Z=0\} = 1/4$, $\mathbf{P}\{Z=1\} = 1/2$, $\mathbf{P}\{Z=2\} = 1/4$;

$\mathbf{P}\{Z_1=1\} = \mathbf{P}\{Z_1=0\} = \mathbf{P}\{Z_2=1\} = \mathbf{P}\{Z_2=0\} = 1/2$.

1.12 Брошены две игральных кости. Найти закон распределения случайной величины X, равной сумме выпавших очков. Найти вероятности событий: $\{X \leqslant 4\}$, $\{X > 4\}$.

Ответ:

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}\{X = x_k\}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mathbf{P}\{X \leqslant 4\} = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P}\{X > 4\} = \frac{5}{6}.$$

к лекции 1-2

1.4. Математическое ожидание

Закон распределения случайной величины позволяет найти вероятность любого события, определенного при помощи случайной величины. Но такая полная информация не всегда необходима. Иногда достаточно знать более простую и наглядную характеристику случайной величины — ее среднее значение или математическое ожидание.

Математическое ожидание случайной величины X обозначается символом $\mathrm{M}X$ и в классической схеме определяется формулой

$$\mathrm{M}X = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{l=1}^{|\Omega|} X(\omega_l). \tag{1.8}$$

Если в этой формуле привести подобные члены, т. е. вынести за скобки x_k в слагаемых с номерами l, для которых $X(\omega_l) = x_k$, то из формулы (1.6) и (1.8) получится формула для вычисления $\mathrm{M}X$:

$$\mathrm{M}X = \sum_{k=1}^{n} x_k\,\mathrm{P}\{X = x_k\}. \tag{1.9}$$

Отметим, что для вычисления по формуле (1.8) не требуется знание закона распределения случайной величины. Если закон распределения известен, то вычисления по формуле (1.9) могут оказаться более простыми.

Пусть теперь X и Y — любые случайные величины. Из формулы (1.8) непосредственно следует равенство

$$\mathrm{M}(X+Y) = \mathrm{M}X + \mathrm{M}Y, \tag{1.10}$$

т. е. *математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Формула (1.10) по индукции распространяется на любое число слагаемых.

1.13 Найти среднее значение выигрыша X, определенного в задаче 1.9.

√ **1.14** Найти математическое ожидание величин X_1, X_2, X, определенных в задаче 1.10.

к лекции 1-2

1.15 Найти $\mathbf{M}Z$ случайной величины Z, определенной в задачах 1.10 и 1.11.

Ответ: $\mathbf{M}Z = 1$.

1.16 Найти математическое ожидание суммы числа очков, выпавших при бросании двух игральных костей.

Ответ: 7.

1.17 Найти математическое ожидание суммы числа очков, выпавших при бросании 100 игральных костей.

УКАЗАНИЕ. Использовать представление

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100},$$

где X_k — число очков, выпавших на k-й кости.

Ответ: 350.

1.18 Продавец тортов оценивает, сколько тортов продается за день. Он знает, что это количество является случайной величиной с законом распределения

x	0	1	2	3	4	5	6
p	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

Продавец получает 4,8 ден. ед. прибыли с каждого торта. Если торт не продан в течение дня, то (по санитарным нормам) он должен быть выброшен, при этом продавец теряет 3,20 ден. ед. Продавец желает максимизировать средний дневной доход. Сколько тортов он должен заказывать каждый день?