Лекция 2

Системы с одной степенью свободы

Общий вид уравнения для механической системы с одной степенью свободы:

$$\boxed{m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)}$$

Решение существует и единственно, если F непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица по x и $\dot{x}$.

Мы рассмотрим более частную задачу об автономной системе: F не зависит от t. В этом случае через каждую точку фазового пространства $(x, \dot{x})$ проходит единственная фазовая кривая. Задача сводится к системе 2-х дифуров 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = F(x, v)/m \end{cases}$$

Особые точки этой системы лежат в фазовом пространстве (x, v) на оси $v = 0$ в точках x_0:

$$\boxed{F(x_0, 0) = 0}.$$

Линеаризованная система в окрестности особой точки x_0 имеет вид

$$\boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ v \end{pmatrix}}, \qquad (1)$$

где $\tilde{x} = x - x_0$, $\alpha = \frac{1}{m}\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ v=0}}$, $\beta = \frac{1}{m}\frac{\partial F}{\partial v}\Big|_{\substack{x=x_0\\ v=0}}$ (2)

Ограничимся еще больше: пусть F не зависит от $v \Rightarrow \beta = 0$. Практически это значит, что в механической системе не действует внешняя магнитная сила и нет сил вязкого трения.

В таком случае у системы (1) с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ могут быть особые точки типа седло (если $\alpha > 0$) или типа центр (если $\alpha < 0$). Это следует из общей теории.

Rem: В случае, если $\beta \neq 0$ (скажем, есть силы трения) топологически неустойчивая особая точка типа центр превращается (как правило) в фокус устойчивый

На самом деле уравнение Ньютона вида

$$\boxed{m\ddot{x} = F(x)} \qquad (1a)$$

настолько просто, что в анализе его фазового портрета можно продвинуться существенно дальше. У этого уравнения есть интегрирующий множитель $\dot{x}$:

$$\dot{x} * \Big|\ m\ddot{x} = F(x) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{x}^2}{2}\right) = F(x)\dot{x},$$

и вводя первообразную функцию

$$\boxed{U(x) := -\int F(x)\,dx,} \qquad (2)$$

можно проинтегрировать уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(U(x)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E \text{ (константа)}} \qquad (3)$$

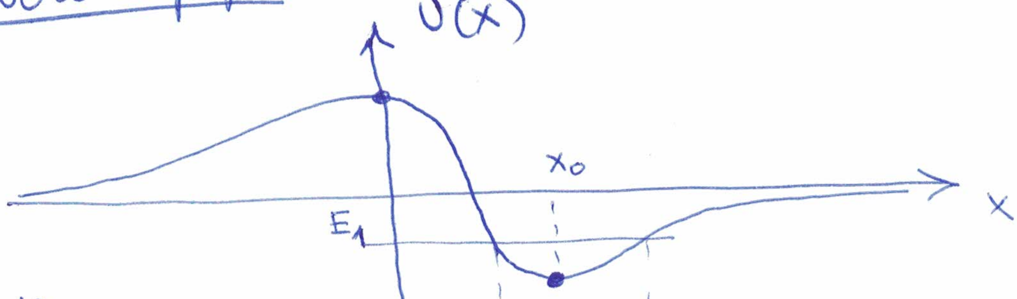
$U(x)$ называется <u>потенциальной энергией силы</u> $F(x)$;

$\frac{m\dot{x}^2}{2}$ — <u>кинетической энергией материальной точки</u>,

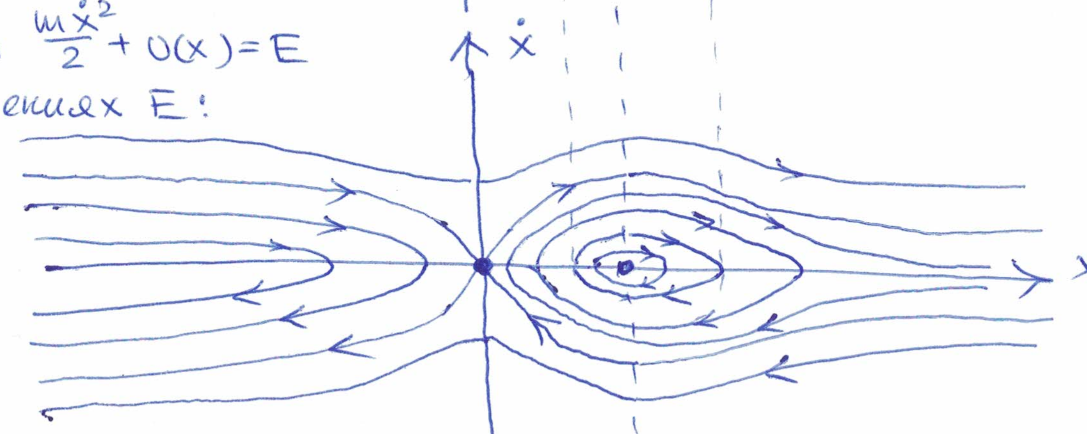
E — <u>полной механической энергией</u> этой точки в поле силы $F(x)$, а утверждение (3) — <u>законом сохранения энергии</u>.

Закон сохранения энергии для механической системы с 1-й степенью свободы полностью определяет её фазовый портрет: фазовые кривые — это графики функций (3) при разных значениях константы E в фазовом пространстве $(x, \dot{x})$.

<u>Пример фазового портрета</u>:



Графики функций $\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$ при разных значениях E:



Правила рисования фазовых портретов 1-мерных систем:

1) Каждая фазовая кривая является (частью) графика функции $\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$ при некотором значении константы

2) Точки x_0 минимума $U(x)$ являются точками покоя системы при $E = U(x_0)$ (особая точка типа центр)

3) Точки x_0 максимума $U(x)$ являются точками неустойчивого равновесия системы при $E = U(x_0)$ (особая точка типа седло)

4) Кривая $\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$ при $E = U(x_0)$, где x_0 – максимум $U(x)$, делится точкой неустойчивого равновесия ($x = x_0$) на компоненты связности. Каждая из них является отдельной фазовой кривой. – сепаратрисой фазового портрета

5) Фазовый портрет системы зеркально симметричен относительно оси $\dot{x} = 0$.

6) Для фазовой кривой с заданным значением энергии E точки x_i : $E = U(x_i)$ являются точками поворота. Касательные к фазовой кривой в этих точках вертикальны (предполагается, что x_i – не точки экстремума $U(x)$).

7) У любой фазовой кривой её локальные минимумы и максимумы достигаются при значениях $x = x_0$, где x_0 – точки экстремума $U(x)$.

8) Стрелки направления движения на фазовых кривых глядят вправо/влево при $\dot{x} > 0$ / $\dot{x} < 0$.

Далее мы обсуждаем поведение фазовых кривых в окрестности особой точки x_0 ($U'(x_0)=0$). При этом мы будем считать $\boxed{U''(x_0) \neq 0}$. Дело в том, что коэффициент α линеаризованной системы (1) (см. стр. 1) пропорционален $U''(x_0)$: $\alpha \sim \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x_0} \sim U''(x_0)$, а классификация особых точек работает лишь для невырожденной матрицы в системе (1), т.е. в случае $\alpha \neq 0$

---

9 Наклон сепаратрис в точке неустойчивого равновесия

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{-\frac{U''(x_0)}{m}}}$$

Здесь α – угол наклона сепаратрисы в оси $O\vec{x}$. Формула учитывает, что в точке x_0 локального максимума $U(x)$ $U''(x_0) < 0$.

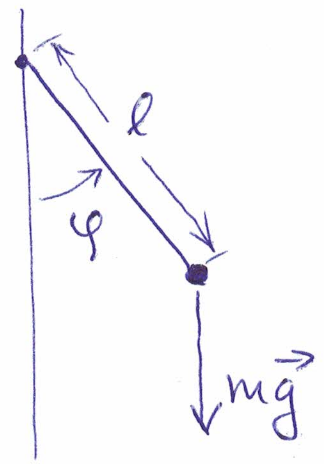
10 В малой окрестности точки устойчивого равновесия фазовые кривые замкнуты (это особая точка типа "центр"), похожи на эллипсы, причём период обращения T системы по этим кривым

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}}$$

В этой формуле $U''(x_0)>0$, т. к. x_0 — точка локального минимума $U(x)$.

11 Время движения системы по сепаратрисе до точки неустойчивого равновесия <u>бесконечно</u>. Этим сепаратриса отличается от ограниченных траекторий. Она может быть ограниченной, но она не замкнута, и время движения по ней бесконечно

<u>Пример</u>: <u>Математический маятник</u>.



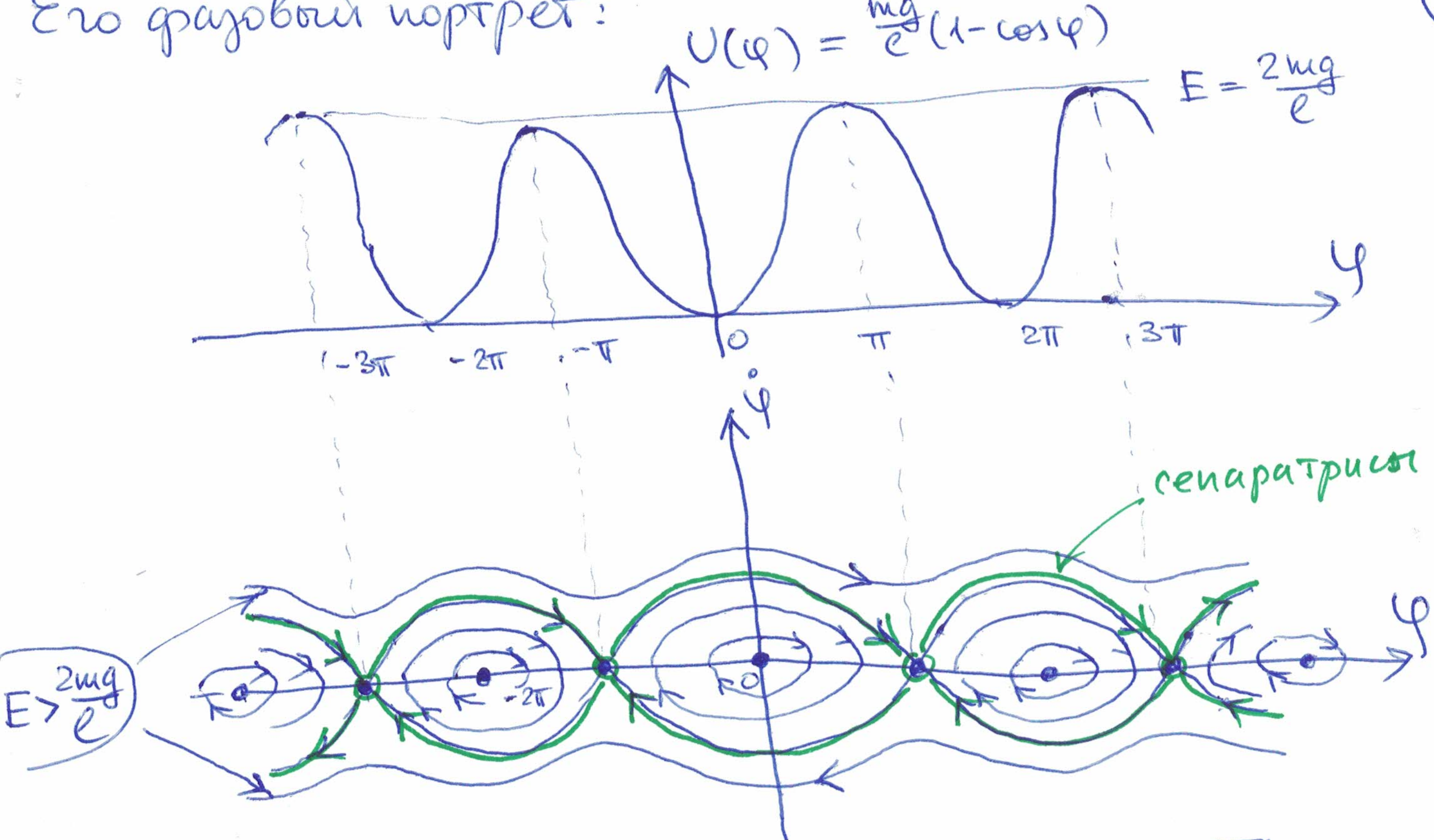
Как мы убедились в первой лекции (см. стр. 14), математический маятник движется по закону

$$m\ddot{\varphi} = -m\frac{g}{l}\sin\varphi$$

Домножая это уравнение на $\dot{\varphi}$ и интегрируя по t, получаем закон сохранения энергии математического маятника

$$\boxed{\frac{m\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mg}{l}(1-\cos\varphi) = E}$$

Его фазовый портрет:



На этом фазовом портрете точки $\varphi = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $E = 0$ — точки устойчивого равновесия (маятник висит внизу); точки $\varphi = 2\pi(k + 1/2)$, $k \in \mathbb{Z}$, при $E = \frac{2mg}{l}$ — точки неустойчивого равновесия (маятник балансирует в положении "вертикально вверх");

при $E = \frac{2mg}{l}$ существует ∞ много фазовых кривых;

при $E > \frac{2mg}{l}$ есть 2 фазовые кривые с одним значением E, отвечающие вращению маятника по/против часовой стрелки.

Закон сохранения энергии 1-мерной системы можно разрешить относительно $\dot{x}$ и еще раз проинтегрировать по t:

$$\boxed{\dot{x} = \underbrace{\pm}_{\operatorname{sgn}\dot{x}} \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} \qquad (4a)$$

$$\Downarrow$$

8

$$\boxed{(t-t_0)=\int_{t_0}^{t} dt = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}} \qquad (4в)$$

В редких случаях этот интеграл берется явно, и тогда мы имеем явное аналитическое описание траектории движения системы.

Можно ли провести подобный анализ для систем с многими степенями свободы?

Пусть x_i, $i=1,2\ldots,n$, — координаты механической системы в некоторой ИСО,

$$\boxed{m\ddot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\,i=1,2,\ldots,n} \qquad (5)$$

её уравнения движения. Домножив i-ое уравнение на $\dot{x}_i$ в левой части получаем $\frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right)$, а в правой получаем полную производную времени только, если F_i зависит лишь от x_i (не зависит от всех $x_j : j\neq i$). Это — неинтересный случай.

Получить полную производную времени в правой части можно лишь просуммировав все уравнения $\sum_{i=1}^{n}$ (т.е. их левые и правые части), и потребовав

$$\boxed{F_i(x_1\ldots x_n) = -\frac{\partial U(x_1\ldots x_n)}{\partial x_i}}_{\,i=1,2,\ldots n} \qquad (6)$$

Силы, компоненты которых удовлетворяют условиям (6), называются потенциальными, $U(x_1 \ldots x_n)$ называется при этом потенциальной энергией этих сил. Уравнения Ньютона (5) в случае потенциальных сил можно проинтегрировать и получить закон сохранения энергии (ЗСЭ):

$$\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m\frac{\dot{x}_i^2}{2}} + U(x_1, \ldots x_n) = E}$$

Кинетическая энергия системы
(в нерелятивистской механике это всегда
квадратичная форма скоростей)

В случае систем с многими степенями свободы ЗСЭ недостаточен для определения фазовых кривых, но даёт важную информацию, например, об ограниченности (или неограниченности) движения системы.

Что происходит, если сила
не потенциальна?

Действуя, как при выводе ЗСЭ, мы получаем из (5)

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i F_i(x_1 \ldots x_n)$$

или, эквивалентно:

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} m\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} dx_i F_i(x_1 \ldots x_n)$$

Стоящую в правой части этого равенства дифференциальную 1-форму можно интегрировать по t вдоль кривой $\gamma = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}\big|_{t\in[t_0,t_1]}$ — т.е., вдоль траектории движения системы. Результат интегрирования

$$\boxed{A_\gamma = \int\limits_\gamma \sum_{i=1}^{n} dx_i\, F_i\left(x_1(t), \dots x_n(t)\right)}$$

называется работой силы $\vec{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ при перемещении вдоль траектории γ.

Вообще говоря, A_γ зависит от формы кривой γ. Если же сила $\vec{F}$ потенциальна, то работа зависит лишь от начальной и конечной точек кривой:

$$\boxed{A_\gamma = -\int\limits_\gamma d\,U(x_1 \dots x_n) = U(x_1(t_0) \dots x_n(t_0)) - U(x_1(t_1) \dots x_n(t_1))}$$

Необходимым условием потенциальности $\vec{F}$ является замкнутость формы $\boxed{\omega = \sum_i dx_i F_i}$: $\boxed{d\omega = 0}$.

В декартовых координатах это условие имеет вид:

$$\boxed{\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall\, i \neq j}$$

По Лемме Пуанкаре это условие является достаточным т.е. гарантирует точность формы ω : $\boxed{\omega = -dU}$, если конфигурационное пространство системы односвязно.

Пример потенциальной силы:

Центральная сила:

$$\boxed{F_i(x_1..x_n) = \frac{x_i}{|x|} f(|x|), \text{ где } |x| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}}$$

Действительно: $\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|} \Rightarrow F_i(x_1 \ldots x_n) = \frac{\partial |x|}{\partial x_i} f(|x|)$,

следовательно

$$\boxed{F_i(x_1..x_n) = -\frac{\partial U(|x|)}{\partial x_i}, \text{ где } U(x) = -\int f(x)\,dx}$$

Rem: Кулоновская сила и сила тяготения являются центральными, а значит, потенциальными.