# Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

На протяжении всего курса мы не будем различать *римановы поверхности* и *комплексные кривые*. В свою очередь, *компактные* римановы поверхности не отличаются от комплексных *гладких алгебраических* кривых.

**Литература:**
Основная:
М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов, Алгебраические кривые: по направлению к пространствам модулей, М., МЦНМО, 2019
Дополнительная:
Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, Принципы алгебраической геометрии, Глава 2
С. М. Львовский, Введение в римановы поверхности, `https://math.hse.ru/spec-riman`
А.К.Звонкин, С.К.Ландо, Графы на поверхностях и их приложения, М. МЦНМО, 2010

С точки зрения топологии компактная риманова поверхность представляет собой двумерную ориентируемую поверхность. Все такие поверхности — это сфера $S^2$, тор $T^2 = S^1 \times S^1$, и т.д. Поверхность в этом списке однозначно задается натуральным числом — своим *родом* $g$.

Всякая некомпактная риманова поверхность получается вырезанием некоторого замкнутого подмножества из компактной.

Внутренность всякого многоугольника является поверхностью. Склеивая многоугольники по сторонам (так, чтобы *всякая сторона многоугольника склеилась ровно с одной стороной того же или другого многоугольника*), мы получаем новые поверхности. При этом надо следить, чтобы склеенная поверхность оставалась ориентируемой, т.е. чтобы из нее нельзя было вырезать ленту Мебиуса.
Наоборот, всякую поверхность можно разрезать на многоугольники. Причем это можно сделать бесконечным числом различных способов.

Если включать в пары не все стороны склеиваемых многоугольников, а только некоторые из них, то получится *оиентированная двумерная поверхность с краем*. *Край* поверхности образуют те стороны многоугольников, которые не попали в пары. Край представляет собой несвязное объединение нескольких окружностей.

Склеивая данную поверхность из многоугольников, мы можем использовать разное количество многоугольников, а также многоугольники с различным числом сторон. Стороны склеиваемых многогугольников образуют граф на поверхности; вершинами этого графа являются отождествленные вершины многоугольников. Обозначим количество многоугольников через $F$, количество вершин полученного графа через $V$ и количество его ребер через $E$. Тогда справедливо следующее утверждение:

**Theorem**

*Величина $V - E + F$ не зависит от способа разрезания поверхности на многоугольники. Для поверхности рода $g$ эта величина равна $2 - 2g$.*

Величина $V - E + F = 2 - 2g$ называется *эйлеровой характеристикой* данной поверхности.

# Лекция 1. Предварительные сведения: Аддитивность эйлеровой характеристики

Будучи равной $2-2g$, эйлерова характеристика поверхности тесно связана с ее родом, который кажется более простой характеристикой поверхности. Однако она во многих отношениях удобнее рода: во-первых, эйлерову характеристику легко определить для любой поверхности, в том числе некомпактной или с краем, во-вторых, она аддитивна: $\chi(M \sqcup N) = \chi(M) + \chi(N)$ для несвязного объединения любых двух поверхностей (и не только поверхностей, а и для любого *симплициального комплекса*).

Например, если из поверхности выкинуть $n$ точек (или $n$ дисков), то ее эйлерова характеристика уменьшится на $n$ (поскольку эйлерова характеристика точки или диска равна 1).

Эйлеровы характеристики гомотопически эквивалентных симплициальных комплексов совпадают.

Пусть $f : M \to N$ — непрерывное отображение двух поверхностей. Отображение $f$ называется *накрытием степени* $d$, если у каждой точки $y \in N$ есть окрестность $U(y) \subset N$, гомеоморфная диску $D^2$, полный прообраз которой $f^{-1}(U(y))$ гомеоморфен несвязному объединению $d$ дисков $D^2$, причем ограничение $f$ на каждый из этих дисков является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом. Здесь $d$ может быть натуральным числом или бесконечностью (если у каждой точки в $N$ бесконечно много прообразов).

Типичный пример накрытия дается отображением $z \mapsto z^d, d = 1, 2, \dots,$ проколотого в нуле единичного диска $D'$ в себя. Степень этого отображения равна $d$. Всякое *голоморфное* отображение комплексных кривых имеет такой вид в подходящих локальных координатах, что и устанавливает прямую связь между голоморфными отображениями и накрытиями.

Типичный пример накрытия дается отображением $z \mapsto z^d, d = 1, 2, \dots,$ проколотого в нуле единичного диска $D'$ в себя. Степень этого отображения равна $d$. Всякое *голоморфное* отображение комплексных кривых имеет такой вид в подходящих локальных координатах, что и устанавливает прямую связь между голоморфными отображениями и накрытиями.

Выберем на данной поверхности $N$ базисную точку $y_0 \in N$. Накрытия $(M, x_0) \to (N, y_0)$ поверхности $N$ с базисной точкой $y_0$ (рассматриваемые с точностью до гомеоморфизма поверхности $(M, y_0)$) находятся во взаимно-однозначном соответствии с подгруппами фундаментальной группы $\pi_1(N, y_0)$

Задача. Опишите все накрытия двумерной сферы.

Предыдущая задача показывает, что у поверхности может быть совсем мало накрытий. В то же время, отображение $z \mapsto z^d$ является голоморфным отображением единичного диска в себя, но не накрытием единичного диска. Поэтому для работы с голоморфными отображениями больше подходят разветвленные накрытия.

Непрерывное отображение компактных ориентированных поверхностей $f : N \to M$ называется *разветвленным накрытием* степени $d$, если в $M$ можно выкинуть конечный набор точек $\{y_1, \dots, y_n\}$ так, что над дополнением к этому набору отображение $f : (N \setminus f^{-1}(\{y_1, \dots, y_n\})) \to (M \setminus \{y_1, \dots, y_n\})$ становится накрытием степени $d$.

В частности, отображение $z \mapsto z^d$ является разветвленным накрытием единичного диска степени $d$.

# Лекция 1. Предварительные сведения: Разветвленные накрытия; кратность прообраза

Пусть $f : N \to M$ — разветвленное накрытие степени $d$. Набор точек $\{y_1, \dots, y_n\} \subset M$ называется набором *точек ветвления*, если над дополнением к нему $f$ является накрытием, а над дополнением к любому его подмножеству — нет.
У каждой точки ветвления $y_i$ меньше, чем $d$ прообразов при $f$; у каждой из остальных точек поверхности $M$ ровно $d$ прообразов. У каждого прообраза $x \in f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in M$ есть *кратность* — число прообразов точки $y'$, близкой к $y$, лежащих вблизи $x$. В окрестности точки кратности $d_j$ можно выбрать комплексную координату $z$ так, что в окрестности ее образа есть комплексная координата, в которой отображение $f$ имеет вид $z \mapsto z^{d_j}$. Сумма кратностей прообразов любой точки равна $d$.

# Лекция 1. Предварительные сведения: Разветвленные накрытия; формула Римана–Гурвица

Пусть $f : N \to M$ — разветвленное накрытие степени $d$, $\{y_1, \dots, y_n\} \subset M$ — набор его точек ветвления, и пусть $m_i = |f^{-1}(y_i)|$ — количество прообразов точки $y_i$.

**Theorem (формула Римана–Гурвица)**

*Эйлерова характеристика поверхности $N$ выражается следующей формулой:*

$$\chi(N) = d(\chi(M) - n) + \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

# Лекция 1. Предварительные сведения: Разветвленные накрытия; монодромия

Пусть $f: N \to M$ — накрытие степени $d$, $y_0 \in M$. Всякая непрерывная петля в $M$ с началом и концом в $y_0$ определяет перестановку множества точек прообраза $f^{-1}(y_0)$, т.е. перестановку множества из $d$ элементов. Эта перестановка зависит только от гомотопического класса петли и называется *монодромией* пути. Определенный таким образом гомоморфизм $\pi_1(M, y_0) \to S_d$ называется *гомоморфизмом монодромии*, а его образ — *группой монодромии* накрытия. Для разветвленного накрытия монодромия определяется как монодромия соответствующего ему неразветвленного накрытия. Накрывающая поверхность является *связной*, если и только если группа монодромии действует на слое *транзитивно*, т.е. если для любых двух прообразов точки $y_0$ есть перестановка монодромии, переводящая одну из них в другую.

В частном случае, когда $M \equiv S^2$, монодромия разветвленного накрытия $f : N \to S^2$ полностью определяется набором перестановок прообраза $f^{-1}(y_0)$ точки $y_0 \in S^2$, не являющейся точкой ветвления, задаваемых путями, идущими из точки $y_0$ в точки ветвления $y_1, \dots, y_n$. Этот набор перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ может быть любым — с единственным ограничением $\sigma_n \circ \sigma_{n-1} \cdots \circ \sigma_1 = \mathrm{id}$.

## Семинар 1. Задачи

- Поверхность какого рода дают склейки многоугольников на рисунке?

# Семинар 1. Задачи

- Поверхность какого максимального рода можно получить, склеивая многоугольники на рисунке?

# Семинар 1. Задачи

- Докажите, что тор можно накрыть только тором. Опишите все конечнократные накрытия тора тором.
- Пусть компактная поверхность рода $g > 1$ накрыта поверхностью рода $h$ со степенью $d > 0$. Выразите $h$ через $g$ и $d$.
- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия двумерной сферы с двумя точками ветвления.

# Семинар 1. Задачи

- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия тора с одной точкой ветвления.
-